ε.δε.μ²
ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΓΑΣΙΕΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

Μη Επιβλεπόμενη Μάθηση - Unsupervised Learning

K-Means Clustering
Ανάλυση Κυρίων Συνιστωσών - Principal Component Analysis (PCA)
Self-Organizing Maps (SOM)
Autoencoders

καθ. Βασίλης Μάγκλαρης
maglaris@netmode.ntua.gr
www.netmode.ntua.gr

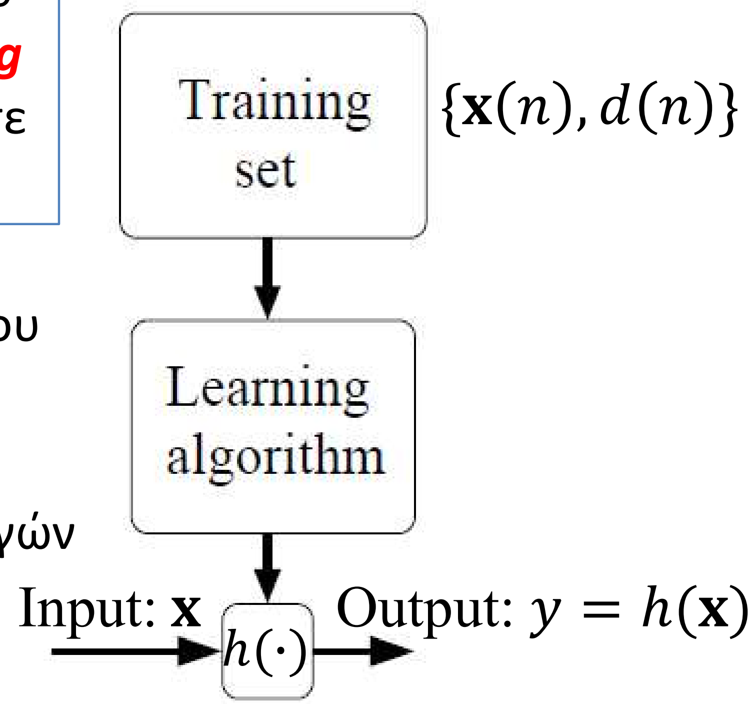
Μέσω Πλατφόρμας Webex
Τρίτη 5/3/2024

Γενικό Μοντέλο Επιβλεπόμενης Μάθησης - Supervised Learning (*επανάληψη*)

Βασισμένο στο Andrew Ng, “CS229 Lecture Notes”, Stanford University, Fall 2018

- Στόχος του συστήματος είναι η αντιστοίχηση ενός δειγματικού στοιχείου εισόδου (***input sample point***, ***example***, ***instance***) $\mathbf{x} = [x_1\ x_2 \ldots x_m]^{\mathrm{T}}$ σε τιμές εξόδου y που εκτιμούν επιθυμητές τιμές d (***labels***, ***targets***) π.χ. πρόβλεψη ή ταξινόμηση. Τα στοιχεία x_i είναι αριθμητικές τιμές που κωδικοποιούν m ειδοποιά χαρακτηριστικά (***features***) του δειγματικού στοιχείου $\mathbf{x}$

Ζητείται ο προσδιορισμός της συνάρτησης εισόδου - εξόδου $y = h(\mathbf{x}) \cong d$ που προκύπτει από δείγμα μάθησης (***Training Set***) N ***labeled*** ζευγών $\{\mathbf{x}(n), d(n)\}$, $n = 1,2,\ldots,N$ γνωστών σε εξωτερικό εκπαιδευτή (***supervisor***)



- Η μορφή και οι παράμετροι της $h(\cdot)$ προσδιορίζονται με αλγόριθμο μάθησης που συγκλίνει σε προσέγγιση του στόχου της υπόθεσης για τα N στοιχεία του δείγματος μάθησης

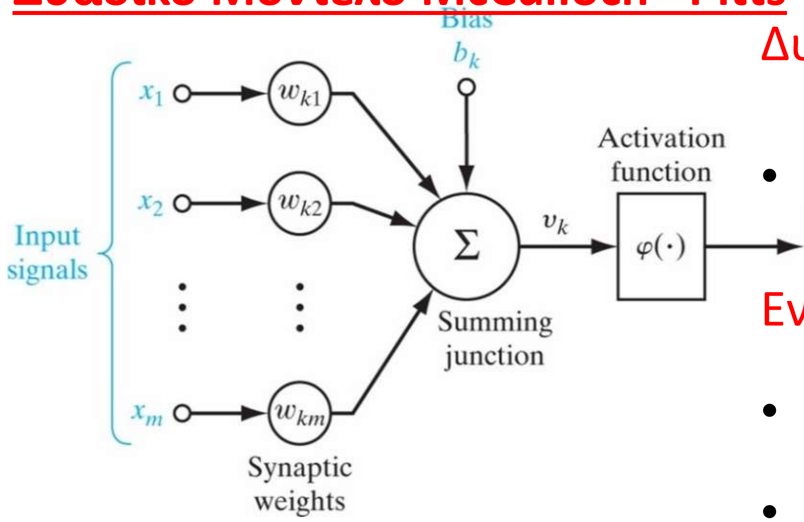
$$d(n) \cong y(n) = h(\mathbf{x}(n))$$

- Αν ο στόχος ικανοποιείται με μικρό αριθμό διακριτών επιλογών (κλάσεων) της y πρόκειται για πρόβλημα Ταξινόμησης, ***Classification*** (για δύο κλάσεις έχουμε δυαδική ταξινόμηση)
- Αν η έξοδος y λαμβάνει συνεχείς τιμές, το πρόβλημα αναφέρεται σαν Παλινδρόμηση, ***Regression***

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

Επιβλεπόμενη Μάθηση & Νευρωνικά Δίκτυα (*επανάληψη*)

Δυαδικό Μοντέλο McCulloch - Pitts

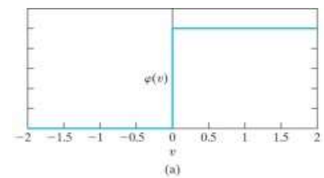


Δυαδική $\varphi(\cdot)$ ***μη γραμμικού νευρώνα*** k:

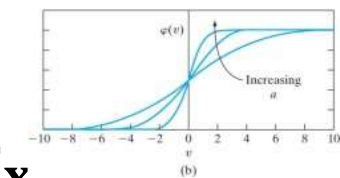
- ***Signum Function***: $y_k = \varphi(v_k) = \text{sgn}(v_k) = \begin{cases} -1, v_k < 0 \\ 0, v_k = 0 \\ +1, v_k > 0 \end{cases}$

Εναλλακτικές επιλογές $\varphi(\cdot)$:

- ***Threshold Function***: $\varphi(v_k) = \begin{cases} 0, v_k < 0 \\ 1, v_k \geq 0 \end{cases}$



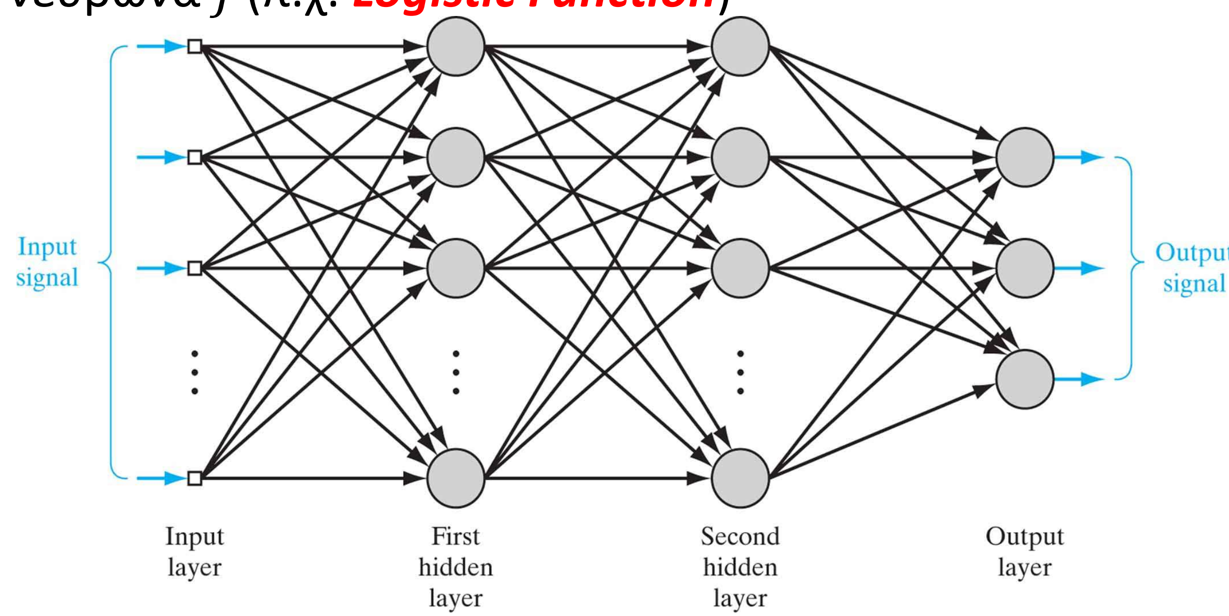
- ***Hyperbolic Tangent***: $\varphi(v_k) = \tanh(v_k)$
- ***Logistic Function***: $\varphi(v_k) = \frac{1}{1+\exp(-av_k)}$



- ***Γραμμικός νευρώνας***: $\varphi(v_k) = v_k = \mathbf{w}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k$
- ***Rectified Linear Unit*** $ReLU$: $\varphi(v_k) = \max\{0, v_k\}$

Multilayer Perceptron (*MLP*)

Διαφορίσιμες μη γραμμικές $\varphi_j(v_j)$ νευρώνα j (π.χ. ***Logistic Function***)



Επιβλεπόμενη Μάθηση

Back Propagation Algorithm

Προσδιορισμός βαρών $\mathbf{w}_k$ ώστε να ελαχιστοποιείται η μέση απόκλιση (***MSE***) $y_k(n)$ από τα *labels* $d(n)$:

$\min_{\mathbf{w}_k}\{\frac{1}{2N}\sum_{n=1}^{N}[d(n) - y_k(n)]^2\}$

διαδοχικά, με εισόδους των N παραδειγμάτων μάθησης $\mathbf{x}(n)$ σε δύο φάσεις: *Forward*, *Backward*

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

Μη Επιβλεπόμενη Μάθηση – Unsupervised Learning, Hebbian Learning

- Εκτίμηση *a-priori* πιθανοτήτων $p(\mathbf{x})$ του δειγματικού στοιχείου $\mathbf{x} = [x_1 \; x_2 \ldots x_m]^{\mathrm{T}}$ με m χαρακτηριστικά - *features* x_i π.χ. *K-Means Clustering* - επιλογή K Κέντρων Βάρους Συστοιχιών (*cluster centroids*) και κατανομή σε *clusters* των σημείων $\mathbf{x}$

- Δεν υπάρχει εκ των προτέρων κατηγοριοποίηση (*labelling*) δεδομένων. Το σύστημα με βάση στατιστικές εκτιμήσεις για τα χαρακτηριστικά (*features*) των δειγματικών στοιχείων μάθησης (*training examples*) $\mathbf{x}$ και σχεδιαστικούς κανόνες (π.χ. κανόνα μάθησης *Hebb*) ορίζει συνάρτηση εξόδου $y = h_{\mathbf{w}}(\mathbf{x})$. Είσοδοι νέων δειγματικών στοιχείων *test* δοκιμάζουν την ικανότητα γενίκευσης (*generalization*) του μοντέλου $h_{\mathbf{w}}(\cdot)$ που βασίστηκε σε στατιστικές παραδοχές του δείγματος μάθησης (*training dataset*) & επικύρωσης (*validation dataset*)

- Η μη επιβλεπόμενη μάθηση περιλαμβάνει συστήματα αυτο-οργάνωσης (π.χ. *Self-Organizing Maps* - *SOM*, *Autoencoders*) και μαθηματικά εργαλεία επιλογής κυριάρχων χαρακτηριστικών (*principal components*) για την αποτελεσματική επεξεργασία - αποθήκευση - ταξινόμηση δεδομένων, π.χ. για επεξεργασία σήματος (*speech* - *image processing*) και αναγνώριση προτύπων (*pattern recognition*)

Διευκρίνιση: Στατιστική Θεώρηση Δειγματικών Δεδομένων

Ένα δείγμα (*sample*) δεδομένων είναι (υπο)σύνολο N διανυσματικών δειγματικών στοιχείων (παραδειγμάτων) $\mathbf{x}$ που επιλέγονται ανάμεσα στα διανύσματα του δειγματικού χώρου. Οι συνιστώσες x_i των διανυσμάτων $\mathbf{x} = [x_1 \; x_2 \ldots x_m]^{\mathrm{T}}$ κωδικοποιούν τα m χαρακτηριστικά (*features*) τους σαν δειγματικές τιμές (*sample values*) τυχαίων μεταβλητών

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

Διαμόρφωση Συστάδων μέσω K- Means Clustering

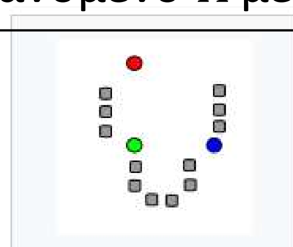
Οργάνωση (*encoding*) K συστάδων (*clusters*) N *unlabeled* παραδειγμάτων μάθησης $\mathbf{x}(n) = [x_1(n)\ x_2(n)\ \dots\ x_m(n)]^{\mathrm{T}}$ βάσει ομοίων χαρακτηριστικών (*unsupervised learning*)

- Καθορισμός Encoder $C(n) = j$: Το $\mathbf{x}(n)$, $n = 1,2,\dots,N$ ανήκει στο *cluster* $j = 1,2,\dots,K$
- Symmetric Measure of Similarity $d(\mathbf{x}(n), \mathbf{x}(n')) = d(\mathbf{x}(n'), \mathbf{x}(n))$
  Τετραγωνική Ευκλείδεια Απόσταση: $d(\mathbf{x}(n), \mathbf{x}(n')) \triangleq \|\mathbf{x}(n) - \mathbf{x}(n')\|^2$
- Εκτιμώμενο Κέντρο Βάρους $\hat{\boldsymbol{\mu}}_j$ (*centroid*) του *cluster* $j = 1,2,\dots,K$ (μέσες Ευκλείδειες αποστάσεις των $\mathbf{x}(i)$ από $\hat{\boldsymbol{\mu}}_j$ για τις επιλογές του encoder $C(n) = j$)
- Κόστος $J(C) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{K}\sum_{C(n)=j}\sum_{C(n')=j}\|\mathbf{x}(n) - \mathbf{x}(n')\|^2 = \sum_{j=1}^{K}\sum_{C(n)=j}\left\|\mathbf{x}(n) - \hat{\boldsymbol{\mu}}_j\right\|^2$
- Κριτήριο Ελαχιστοποίησης: Διαπορά $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_j^2 \triangleq \sum_{C(n)=j}\left\|\mathbf{x}(n) - \hat{\boldsymbol{\mu}}_j\right\|^2$, $\min_C J(C) = \min_C \sum_{j=1}^{K}\hat{\boldsymbol{\sigma}}_j^2$

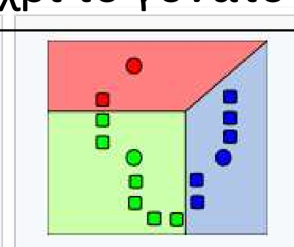
Αλγόριθμος μη επιβλεπόμενης μάθησης: Αυτό-οργάνωση N σημείων σε K Συστάδες

- Αρχική επιλογή *centroids* για υπερπαράμετρο K: Αυθαίρετη επιλογή K κέντρων βάρους
- Τοποθέτηση των N σημείων $\mathbf{x}(n)$ στο πλησιέστερο *centroid*, ανανέωση εκτιμήσεων *centroids* $\hat{\boldsymbol{\mu}}_j, j = 1,2,\dots,K$ και επαναλήψεις μέχρι τη τελική σύγκληση του $C(n) = j$
- Η εκτέλεση του αλγορίθμου είναι αποτελεσματική αλλά χωρίς εγγύηση βέλτιστης λύσης
- Η επιλογή K συνήθως απαιτεί επαναλήψεις (π.χ. με δοκιμές και συγκρίσεις μέσων τετραγωνικών σφαλμάτων για αυξανόμενο K μέχρι το γόνατο της καμπύλης βελτίωσης)

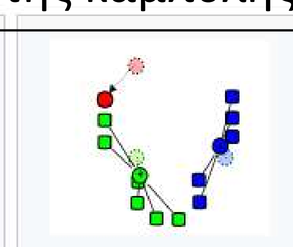
Παράδειγμα: $K = 3$, $N = 12$
(https://en.wikipedia.org/wiki/K-means_clustering)



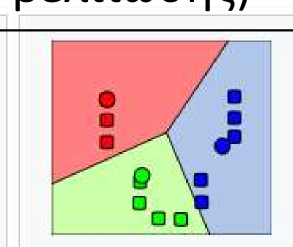
Αρχικοποίηση *Centroids*



1η Διαμόρφωση *Clusters*



Προσδιορισμός Νέων *Centroids*



Τελική Πρόταση *Clusters*

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

Μη Επιβλεπόμενη Μάθηση: Ανάλυση Κυρίων Συνιστωσών
Principal Components Analysis - PCA

The Curse of Dimensionality:
Σε ένα δειγματικό χώρο δεδομένων $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ldots \ x_m]^{\mathrm{T}}$ η κωδικοποίηση των χαρακτηριστικών του δείγματος μπορεί να απαιτεί μεγάλο αριθμό διακριτών στοιχείων x_i, $i = 1,2, \ldots, m$. Για καταγραφή με στατιστική επάρκεια όλων των χαρακτηριστικών απαιτείται αριθμός δειγματικών στοιχείων N πολλαπλάσιος του m (π.χ. $N \gg 5m$, https://en.wikipedia.org/wiki/Curse_of_dimensionality)

Reduction of Dimensionality - Principal Components:
Με *Unsupervised Learning* σε γραμμικό σύστημα εισόδου $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \ldots \ x_m]^{\mathrm{T}}$ μπορεί να μειωθεί ο αριθμός των χαρακτηριστικών (αριθμός συντεταγμένων m) μέσω μετασχηματισμού σε ***Ασυσχέτιστες Κύριες Συνιστώσες*** (*Principal Components*) και έξοδο $\mathbf{y} = [y_1 \, y_2 \ \ldots \ y_l]^{\mathrm{T}}$ με επιλογή των σημαντικότερων συνιστωσών ($l \ll m$ χαρακτηριστικών) με τη μεγαλύτερη αναμενόμενη διασπορά

Μεθοδολογίες για Επιλογή Κυρίων Συνιστωσών:
- *Covariance Method*: Μέσω στατιστικής ανάλυσης του διανυσματικού δειγματικού χώρου μάθησης, μετασχηματισμού σε ορθοκανονικό (*orthonormal*) σύστημα συντεταγμένων και με αλγόριθμους επιλογής σημαντικών (*principal*) συνιστωσών (*αναλογία με μεθόδους Γραμμικής Άλγεβρας και Θεωρίας Επικοινωνιών - μετασχηματισμοί Karhunen - Loève*)
- *Hebbian Learning Method*: Μέσω αυτο-οργάνωσης νευρωνικών δικτύων με τοπικές ρυθμίσεις κανόνων *Hebb* σε μη επιβλεπόμενη μάθηση (*unsupervised learning*)

Orthonormal Transformation σε Principal Components (1/3)

Ορισμοί Στατιστικής Προσέγγισης (Covariance Method) της PCA

- Θεωρούμε είσοδο από δειγματικά στοιχεία δεδομένων $\mathbf{x} = [x_1\ x_2 \dots\ x_m]^{\mathrm{T}}$ με m χαρακτηριστικά (*features*) κωδικοποιημένα στις συνιστώσες x_i
- Οι συνιστώσες x_i αποτελούν *δειγματικές τιμές* (sample values) *τυχαίων μεταβλητών* X_i που αναφέρονται σε τυχαία διανύσματα $\mathbf{X} = [X_1\ X_2\ \dots\ X_m]^{\mathrm{T}}$ του δειγματικού χώρου. Υποθέτουμε πως $\mathrm{E}[\mathbf{X}] = \mathrm{E}[X_i] = 0$
- Η συμμετρική μήτρα $(m \times m)$ $\mathbf{R} = \mathrm{E}[\mathbf{X}\,\mathbf{X}^{\mathrm{T}}]$ είναι η μήτρα συσχέτισης (*Correlation Matrix*) των τυχαίων διανυσμάτων $\mathbf{X}$ με ιδιοδιανύσματα (*eignevectors*) $\mathbf{q}_j$ και ιδιοτιμές (*eigenvalues*) λ_j: $\mathbf{R}\mathbf{q}_j = \lambda_j \mathbf{q}_j$, $j = 1,2,\dots,m$ αριθμημένα κατά φθίνουσα σειρά των λ_j:

$$\lambda_j \mathbf{q}_j^{\mathrm{T}} \mathbf{q}_k = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \quad \text{και} \quad \mathbf{q}_j^{\mathrm{T}} \mathbf{R} \mathbf{q}_k = \begin{cases} \lambda_j, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$$

- Τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{q}_j$ ορίζουν ορθοκανονικές (*orthonormal*) κύριες (*principal*) κατευθύνσεις που μετασχηματίζουν το στοιχείο $\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ \dots\ x_m]^{\mathrm{T}}$ με m συνιστώσες x_i σε $\mathbf{a} = [a_1\ \alpha_2\ \dots\ \alpha_m]^{\mathrm{T}} = [\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{q}_1\ \ \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{q}_2\ \dots\ \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{q}_m]$ με m συνιστώσες a_i που αποτελούν τις **Κύριες Συνιστώσες** (*Principal Components*). Η αρίθμηση ακολουθεί τη φθίνουσα σειρά των $\lambda_j = \mathbf{q}_j^{\mathrm{T}} \mathbf{R} \mathbf{q}_j = var(A_j) \triangleq \sigma_j^2$ όπου A_j τυχαία μεταβλητή με δειγματική τιμή την κύρια συνιστώσα α_j
- Οι αρχικές συνιστώσες προκύπτουν μονοσήμαντα από τις Κύριες Συνιστώσες:

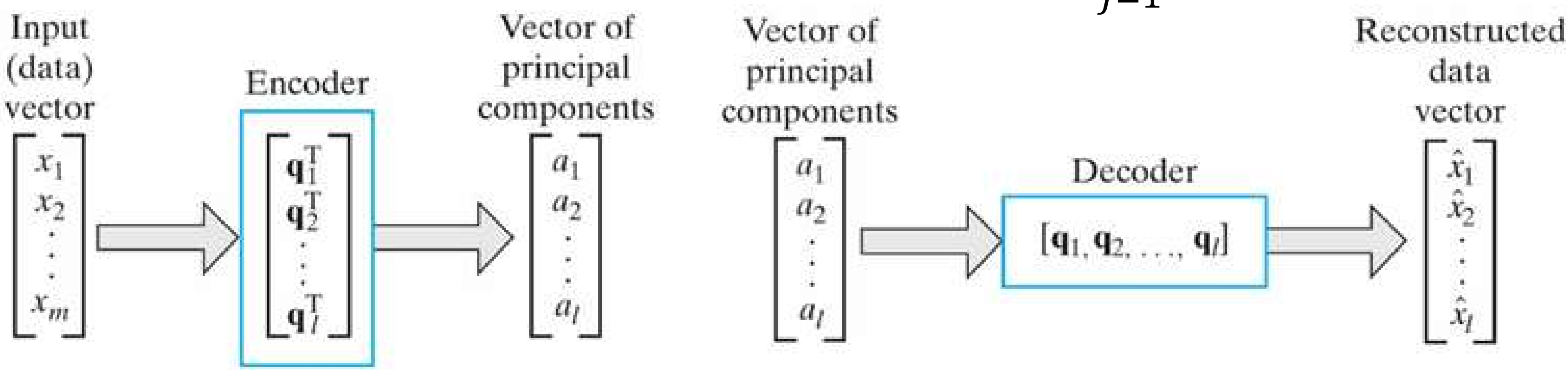
$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{m} a_j \mathbf{q}_j$$

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

Orthonormal Transformation σε Principal Components (2/3)

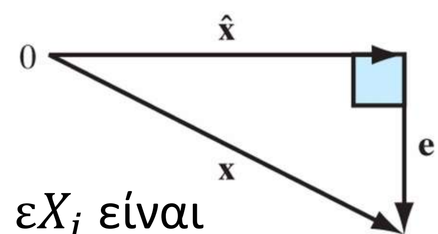
Αν αγνοήσουμε τις κύριες συνιστώσες (*principal components*) με τις μικρότερες διασπορές $\sigma_j^2 = \lambda_j,\ j = l+1, l+2, \dots, m$ προκύπτει προσεγγιστική εκτίμηση (κωδικοποίηση) του στοιχείου $\mathbf{x}$ από το στοιχείο $\hat{\mathbf{x}}$ με μικρότερο αριθμό συνιστωσών $l < m$

$$\hat{\mathbf{x}} = [\hat{x}_1\ \hat{x}_2\ \dots\ \hat{x}_l] = [\mathbf{q}_1\ \mathbf{q}_2 \dots \mathbf{q}_l][a_1\ \alpha_2\ \dots\ \alpha_l]^{\mathrm{T}} = \sum_{j=1}^{l} a_j \mathbf{q}_j \text{ για } l < m$$



Το σφάλμα εκτίμησης $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} = \sum_{i=l+1}^{m} a_i \mathbf{q}_i$ είναι διάνυσμα ορθογώνιο προς το $\hat{\mathbf{x}}$:

$$\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}} = \sum_{i=l+1}^{m} a_i\, \mathbf{q}_j^T \sum_{j=1}^{l} a_j \mathbf{q}_j = 0$$



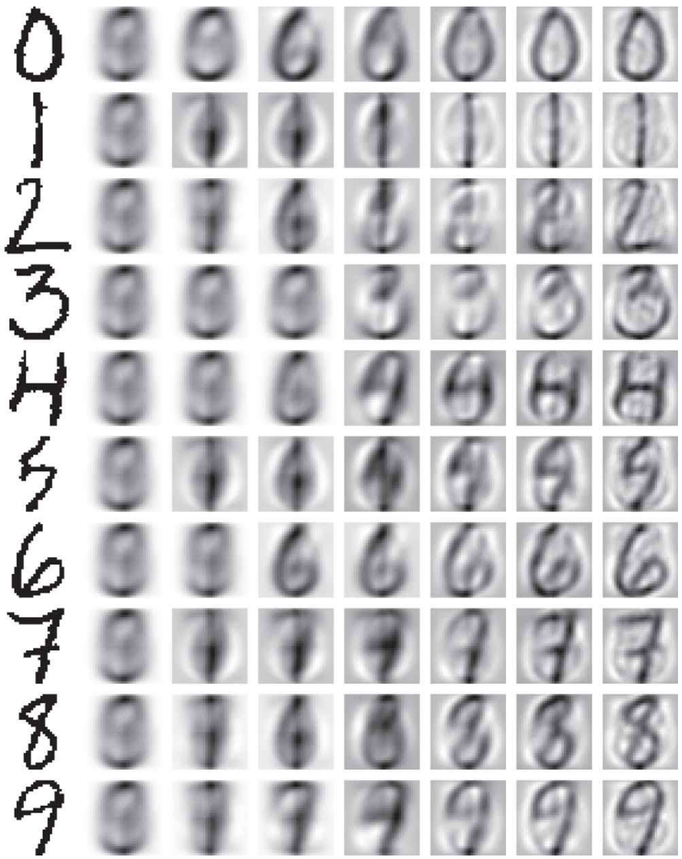
- Η συνολική διασπορά των m ανεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητών εX_j είναι $\sum_{j=1}^{m} \sigma_j^2 = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j$
- Η συνολική διασπορά των l τυχαίων μεταβλητών A_j είναι $\sum_{j=1}^{l} \sigma_j^2 = \sum_{j=1}^{l} \lambda_j$

$\Rightarrow$ Η συνολική διασπορά του σφάλματος $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ είναι $\lambda_{l+1} + \lambda_{l+2} + \cdots + \lambda_m$ που αντιστοιχεί στις κύριες συνιστώσες με τις μικρότερες διακυμάνσεις

Orthonormal Transformation σε Principal Components (3/3)

Εφαρμογή PCA για Ψηφιακή Συμπίεση & Αναγνώριση Εικόνων Χειρόγραφων Αριθμών

Image Compression & Pattern Recognition of Handwritten Numbers



Δειγματικά Στοιχεία Μάθησης:
Σκαναρισμένες εικόνες δέκα χειρόγραφων αριθμών $\{0,1,\ldots,9\}$
$N = 1700$ στοιχεία/αριθμό

Στήλη 1: Κωδικοποίηση με $m = 32 \times 32 = 1024$ δυαδικά ψηφία
Στήλη 2: Δειγματικοί Μέσοι Όροι για κανονικοποίηση

Υπολογισμός των $l = 64$ σημαντικότερων ιδιοδιανυσμάτων
της Μήτρας Συσχέτισης $m \times m = (1024) \times (1024)$
μετά από κανονικοποίηση των δειγματικών στοιχείων
(αφαίρεση δειγματικών μέσων όρων)

Ανασύσταση Εικόνας με $l \leq 64$ **Principal Components**
$$l \ll m = 32 \times 32 = 1024$$
Στήλη 3: $l = 1$
Στήλη 4: $l = 5$
Στήλη 5: $l = 16$
Στήλη 6: $l = 32$ (ικανοποιητική διάκριση αριθμών)
Στήλη 7: $l = 64$ (άψογη διάκριση αριθμών με μεγάλη συμπίεση)

Προσδιορισμός 1ης Κύριας Συνιστώσας από Γραμμικό Νευρώνα με Μάθηση Hebbian (1/2)

Αρχές Αυτο-οργάνωσης Χαρακτηριστικών (Self-organized Feature Analysis)

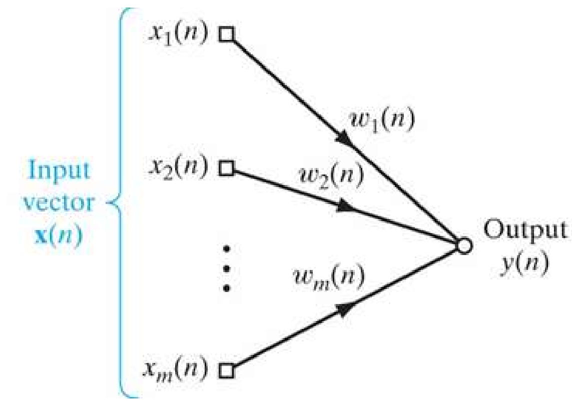
Αξίωμα του Hebb: Αν τα σήματα στα άκρα μιας νευρωνικής σύναψης i ενεργοποιούνται ταυτόχρονα (*synchronous update*) στο βήμα n, το συναπτικό της βάρος $w_i(n)$ ενισχύεται. Αλλιώς φθίνει προς μηδενισμό (*παραλλαγή από αρχικό αξίωμα για μάθηση με όρους νευροψυχολογίας*)

Αρχή Ανταγωνιστικότητας: Οι πιο ενεργές συνάψεις τείνουν να μηδενίσουν τις λιγότερο ενεργές

Γραμμικό Νευρωνικό Δίκτυο Υπολογισμού *First Principal Component* από m Features

Hebbian-based Maximum Eigenfilter

$$y(n) = v(n) = \sum_{i=1}^{m} w_i(n) x_i(n) \text{ στο βήμα } n$$

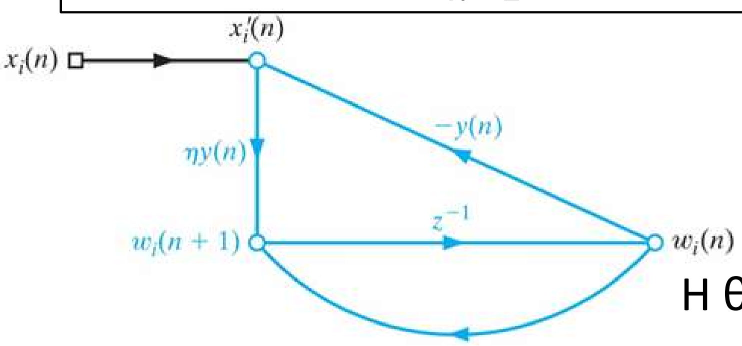


Τα βάρη αυξάνονται στην επανάληψη $n \to n+1 \leq N$ αν $y(n)x_i(n) > 0$ (*αξίωμα Hebb*)

Hebbian Learning: $w_i(n+1) = w_i(n) + \eta y(n) x_i(n)$
$i = 1,2,\ldots,m$, η *learning hyperparameter*

Απαιτείται **Normalization** για ευστάθεια. Με βάση την **Αρχή της Ανταγωνιστικότητας** διαιρούμε σε κάθε βήμα με το εκτόπισμα των $w_k(n)$ που μειώνουν την αύξηση εις βάρος τους:

$$w_i(n+1) = \frac{w_i(n) + \eta y(n) x_i(n)}{\left(\sum_{k=1}^{m} [w_k(n) + \eta y(n) x_k(n)]^2\right)^{1/2}} \cong w_i(n) + \eta y(n)[x_i(n) - y(n) w_i(n)]$$



Η προσέγγιση ισχύει για μικρές τιμές της παραμέτρου η

$$w_i(n+1) = w_i(n) + \eta y(n) x_i'(n),$$
$$x_i'(n) = x_i(n) - y(n) w_i(n)$$

Η θετική ανάδραση $y(n)x_i(n)$ αντισταθμίζεται από την $y(n)w_i(n)$

Προσδιορισμός 1ης Κύριας Συνιστώσας από Γραμμικό Νευρώνα με Μάθηση Hebbian (2/2)

Ζητήματα Σύγκλισης

Διανυσματικοί ορισμοί
$\mathbf{x}(n) = [x_1(n)\ x_2(n)\ \dots\ x_m(n)]^{\mathrm{T}}$
$\mathbf{w}(n) = [w_1(n)\ w_2(n)\ \dots\ w_m(n)]^{\mathrm{T}}$

$$y(n) = \mathbf{w}^{\mathrm{T}}(n)\mathbf{x}(n),\ \ \mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \eta y(n)[\mathbf{x}(n) - y(n)\mathbf{w}(n)] \Rightarrow$$

Αλγόριθμος αυτό-οργανωμένης μη επιβλεπόμενης μάθησης:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \eta[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(n)\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^{\mathrm{T}}(n)(\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(n))\mathbf{w}(n)\mathbf{w}(n)]$$

- Οι όροι $\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(n)$ αποτελούν υλοποίηση της μήτρας συσχέτισης $\mathbf{R} = \mathrm{E}[\mathbf{X}\,\mathbf{X}^{\mathrm{T}}]$ κατά την επανάληψη $n \to n+1 \leq N$ χωρίς μέσους όρους και οδηγούν προς την ανάλυση της σύγκλισης του αλγορίθμου μέσω μη γραμμικής στοχαστικής εξίσωσης διαφορών (*εκτός ορίων του μαθήματος*)

- Δεν υπάρχει εξωτερική επιρροή στον αλγόριθμο μάθησης λόγω της μη επιβλεπόμενης (αυτό-οργανωμένης, *self-organized*) φύσης του πλην του *a-priori* καθορισμού της *hyperparameter* μάθησης η

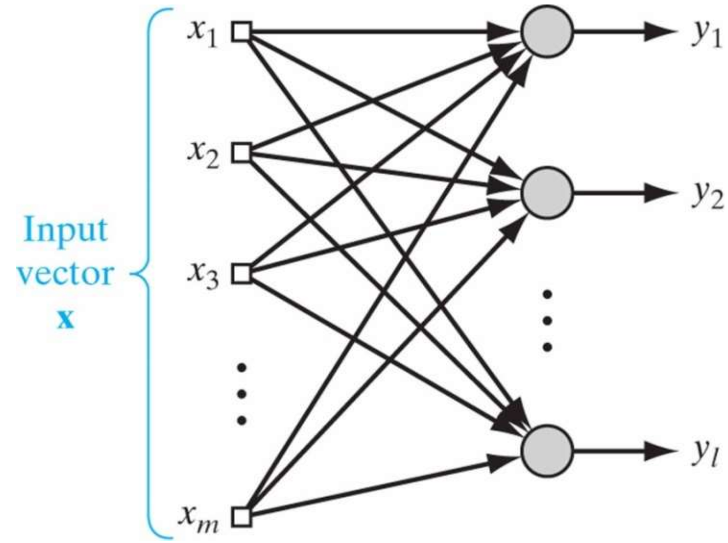
ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

Προσδιορισμός l Κυρίων Συνιστωσών από Γραμμικούς Νευρώνες με Μάθηση Hebbian (1/3) (Hebbian-based Principal-Component Analysis)

Γενίκευση του Hebbian-based maximum Eigenfilter:

Γραμμικό Μονοστρωματικό Feedforward Νευρωνικό Δίκτυο με l νευρώνες εξόδου για προσδιορισμό των l σημαντικών Principal Components από διανυσματικά δεδομένα διαστάσεως m, $l < m$

$$y_j(n) = v_j(n) = \sum_{i=1}^{m} w_{ji}(n) x_i(n), \qquad j = 1,2,\dots,l$$



Hebbian Learning: Τα βάρη $w_{ji}(n)$ από την είσοδο $x_i(n)$, $i = 1,2,\dots,m$ προς την j κύρια συνιστώσα $y_j(n)$, $j = 1,2,\dots,l$ διαφοροποιούνται κατά $\Delta w_{ji}(n)$ στην επανάληψη $n \rightarrow n+1$

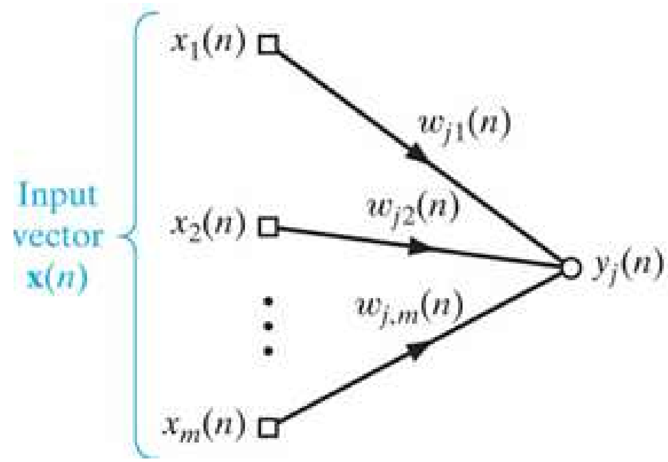
$$\Delta w_{ji}(n) = \eta \left[y_j(n) x_i(n) - y_j(n) \sum_{k=1}^{j} w_{ki}(n) y_k(n) \right], j = 1,2,\dots,l \;\; \& \;\; i = 1,2,\dots,m$$

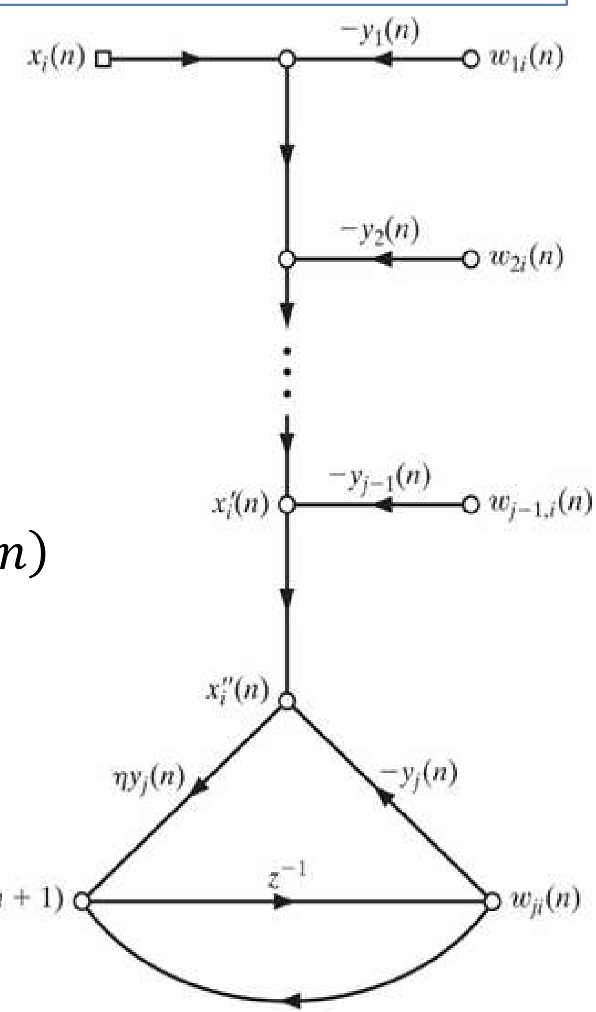
Προσδιορισμός l Κυρίων Συνιστωσών από Γραμμικούς Νευρώνες με Μάθηση Hebbian (2/3) (Hebbian-based Principal-Component Analysis)

Γενικευμένος Αλγόριθμος του Hebb – Generalized Hebbian Algorithm (GHA)

$$\Delta w_{ji}(n) = \eta y_j(n)\left[x_i'(n) - w_{ji}(n) y_j(n)\right], \qquad j = 1,2,\ldots,l \text{ και } i = 1,2,\ldots,m$$

$$x_i'(n) = x_i(n) - \sum_{k=1}^{j-1} w_{ki}(n) y_k(n)$$





$$\Delta w_{ji}(n) = \eta y_j(n) x_i''(n) \text{ όπου } x_i''(n) = x_i'(n) - w_{ji}(n) y_j(n)$$

$$w_{ji}(n+1) = w_{ji}(n) + \Delta w_{ji}(n), \; w_{ji}(n) = z^{-1}[w_{ji}(n+1)]$$

Διανυσματική Μορφή:

$\Delta \mathbf{w}_j(n) = \eta y_j(n)\mathbf{x}_i'(n) - \eta y_j^2(n)\mathbf{w}_j(n), j = 1,2,\ldots,l$

όπου $\mathbf{x}'(n) = \mathbf{x}(n) - \sum_{k=1}^{j-1} \mathbf{w}_k(n) y_k(n)$

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

Προσδιορισμός l Κυρίων Συνιστωσών από Γραμμικούς Νευρώνες με Μάθηση Hebbian (3/3) (Hebbian-based Principal-Component Analysis)

$$\mathbf{x}'(n) = \mathbf{x}(n) - \sum_{k=1}^{j-1} \mathbf{w}_k(n) y_k(n), \qquad j = 1,2,\ldots,l$$

Για $\boldsymbol{j} = \mathbf{1}$: $\mathbf{x}'(n) = \mathbf{x}(n)$

Προσδιορισμός 1ης κύριας συνιστώσας $y_1(n)$

Για $\boldsymbol{j} = \mathbf{2}$: $\mathbf{x}'(n) = \mathbf{x}(n) - \mathbf{w}_1(n) y_1(n)$

Προσδιορισμός 2ης συνιστώσας $y_2(n)$ σαν 1η συνιστώσα μετά από αφαίρεση της ήδη υπολογισθείσας $y_1(n)$

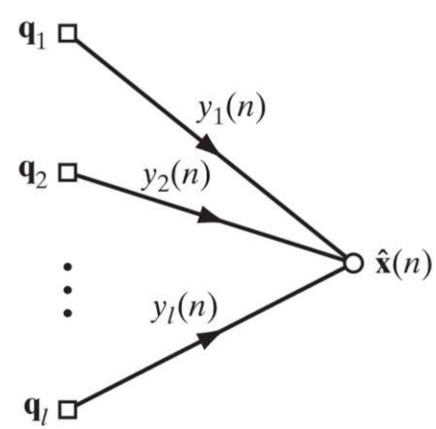
Για $\boldsymbol{j} = \mathbf{3}$: $\mathbf{x}'(n) = \mathbf{x}(n) - \mathbf{w}_1(n) y_1(n) - \mathbf{w}_2(n) y_2(n)$

Προσδιορισμός 3ης συνιστώσας $y_3(n)$ σαν 1η συνιστώσα μετά από αφαίρεση των ήδη υπολογισθείσας $y_1(n)$ και $y_2(n)$

.....

Οι l πιο σημαντικές κύριες συνιστώσες αντιστοιχούν στα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{q}_k$ της μήτρας συσχέτισης $\mathbf{R} = \mathrm{E}[\mathbf{X}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}]$, $k = 1,2,\ldots,l$ αριθμημένες κατά τη φθίνουσα σειρά των ιδιοτιμών $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_l$ και δίνουν την εκτίμηση $\hat{\mathbf{x}}(n)$ με l χαρακτηριστικά του δειγματικού στοιχείου $\mathbf{x}(n)$ με $m > l$

$$\hat{\mathbf{x}}(n) = \sum_{k=1}^{l} y_k(n) \mathbf{q}_k \text{ για } l < m$$



ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

Εφαρμογή PCA μέσω Generalized Hebbian Algortihm (GHA) στη Κωδικοποίηση Εικόνας (1/2)

- **Δείγμα Μάθησης**: 2000 σκαναρισμένες εικόνες της **Lena** 256×256 pixels, 256 gray levels όπως στην ***1η εικόνα*** δεξιά
- Δειγματικά στοιχεία μάθησης: Εικόνες χωρισμένες σε 1024 μη επικαλυπτόμενα τμήματα (***Blocks***) μεγέθους 8×8 pixels: $m = 64$ features/block
- Το κάθε block ορίζει δειγματικό στοιχείο εισόδου σαν διάνυσμα από m features (pixels) κωδικοποιημένες σε 256 gray levels (8 bits/pixel):

$$\mathbf{x}(n) = [x_1(n)\ x_2(n) \ldots x_m(n)]^{\mathrm{T}} \qquad n = 1,2, \ldots, N$$

- Το δείγμα τροφοδοτεί ***Linear Feedforward Δίκτυο*** με $l = 8$ Νευρώνες εξόδου
- Το σύστημα συγκλίνει σε $m \times l = 64 \times 8$ συναπτικά βάρη $w_{ji}(n)$ και απολήγει σε 8 εξόδους (κυριότερες συνιστώσες, ***Significant Principal Components***):

$$y_j(n) = \sum_{i=1}^{m} w_{ji}(n) x_i(n), \qquad j = 1,2, \ldots, l$$

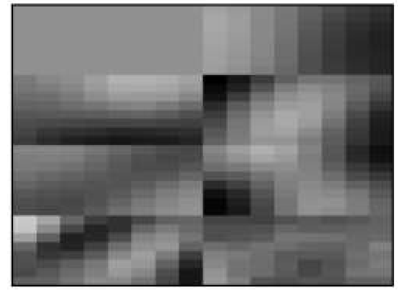
- Ρυθμός μάθησης (***Learning Rate***): $\eta = 10^{-4}$
- Τα βάρη (***weights***) μετά τη σύγκλιση παρίστανται στην ***2η εικόνα*** με $4 \times 2 = 8$ περιοχές (***masks***), 64 τμήματα/mask, σύνολο $64 \times 8 = 1024$ τμήματα που απεικονίζουν την συνεισφορά των 64 χαρακτηριστικών του δείγματος εισόδου στις 8 εξόδους. Το άσπρο χρώμα υποδηλώνει θετική συνεισφορά ενός χαρακτηριστικού, το μαύρο αρνητική και το γκρι μηδενική
- Στη ***3η εικόνα*** παρουσιάζεται ανασύσταση της αρχικής με τη συμμετοχή μόνο των $l = 8$ κυριότερων συνιστωσών της (***l Principal Components***)

$$\hat{\mathbf{x}}(n) = \sum_{k=1}^{l} y_k(n) \mathbf{q}_k, \quad \mathbf{q}_k = \lim_{n} \mathbf{w}_k(n), \qquad \mathbf{w}_k(n) = [w_{k1}(n)\ w_{k2}(n) \ldots\ w_{km}(n)]^{\mathrm{T}}$$

- Η ***4η εικόνα*** αποτελεί συμπίεση της ***3ης εικόνας*** με κβαντισμένες τιμές των βαρών ανάλογα με το λογάριθμο της διασποράς τους (~0.53 bits/pixel)

Original Image

Weights



Using First 8 Components

11 to 1 compression

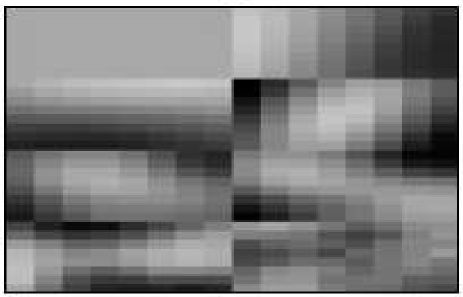
ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

Εφαρμογή PCA μέσω Generalized Hebbian Algortihm (GHA) στη Κωδικοποίηση Εικόνας (2/2)

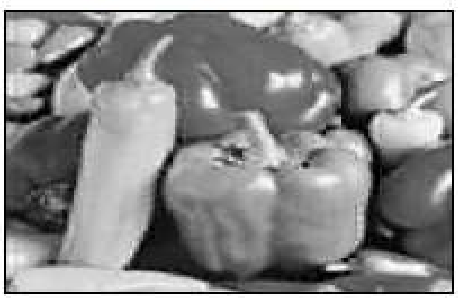
- Αρχική Εικόνα (**Peppers**): 256 × 256 pixels, 256 gray levels στην ***πάνω εικόνα***

Original Image

Weights

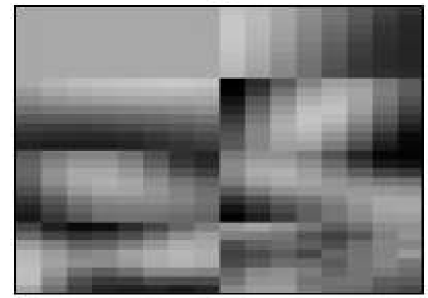


Using First 8 Components

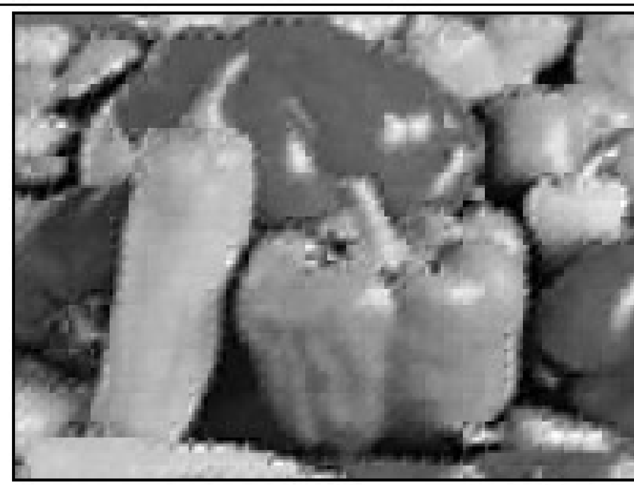


12 to 1 compression μέσω κβαντισμού βαρών των 8 κυριοτέρων συνιστωσών, με βάρη όπως προσδιορίστηκαν για την εικόνα **Peppers**

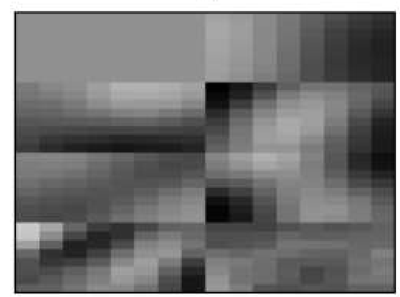
Weights



12 to 1 compression μέσω κβαντισμού βαρών των 8 κυριοτέρων συνιστωσών, με βάρη όπως προσδιορίστηκαν για την εικόνα **Lena** αλλά εφαρμόστηκαν στην εικόνα **Peppers** (***GENERALIZATION*** **?**)



Weights



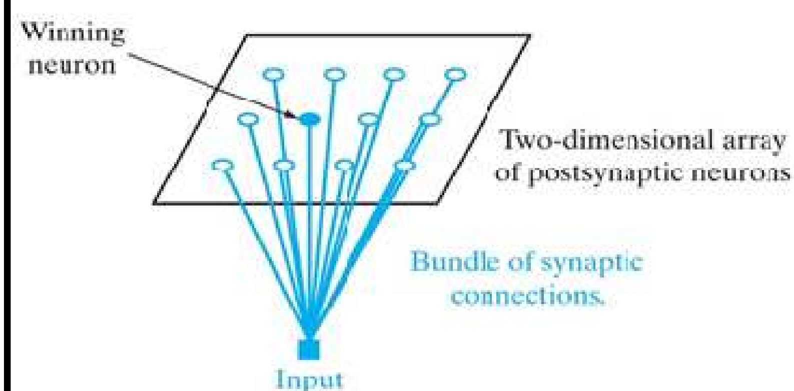
ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

Απεικόνιση Διανυσματικών Δειγματικών Στοιχείων σε Νευρωνικά Δίκτυα με Τοπολογικά Κριτήρια Αυτο-οργάνωσης , Self-Organizing Maps (SOM)

- Τα ***SOM*** είναι μη γραμμικά Νευρωνικά Δίκτυα με εισόδους δειγματικά στοιχεία (***παραδείγματα***) $\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ \dots\ x_m]^{\mathrm{T}}$ m διαστάσεων (***χαρακτηριστικών***)
- Σε αναλογία με τρόπους αποθήκευσης και επεξεργασίας στον εγκέφαλο των θηλαστικών, ο ***Kohonen*** πρότεινε το 1982 μοντέλο ***μονοστρωματικού*** *Feedforward Neural Network* με μη γραμμικούς νευρώνες $j = 1,2, \dots, l$ σε δυσδιάστατο πλέγμα (*Feature Map lattice*) και με κατευθυντικές συνάψεις $\mathbf{w}_j = \left[w_{j1}\ w_{j2}\ \dots\ w_{jm}\right]^{\mathrm{T}}$ από τους κόμβους εισόδου προς τους (*postsynaptic*) νευρώνες του πλέγματος
- Οι έξοδοι των *postsynaptic* νευρώνων, εφόσον ενεργοποιηθούν, συνθέτουν την εκτίμηση του συστήματος για το παράδειγμα $\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ \dots\ x_m]^{\mathrm{T}}$ ως προς την πλησιέστερη προσέγγιση σε πρότυπα (*patterns*) που αποθηκεύτηκαν σε περιοχές του πλέγματος. Οι περιοχές αντιστοιχούν σε γειτονιές ενεργών νευρώνων, που καθορίζονται από τον πλησιέστερο νευρώνα (*winner*) προς το διάνυσμα $\mathbf{x}$ με μη επιβλεπόμενη **Ανταγωνιστική Μάθηση** (*Competitive Learning*) μέσω αυτο-οργάνωσης (***Self-Organizing Map***)

Εφαρμογές SOM

- Επιλογή κυρίαρχων χαρακτηριστικών σε πολυδιάστατα δείγματα
- Συμπίεση εικόνων με εντοπισμό παρομοίων υποπεριοχών
- Αναγνώριση προτύπων, ταξινόμηση παραδειγμάτων
- Φιλτάρισμα από παρεμβολές - θορύβους
- Συμπλήρωση ατελών παραδειγμάτων



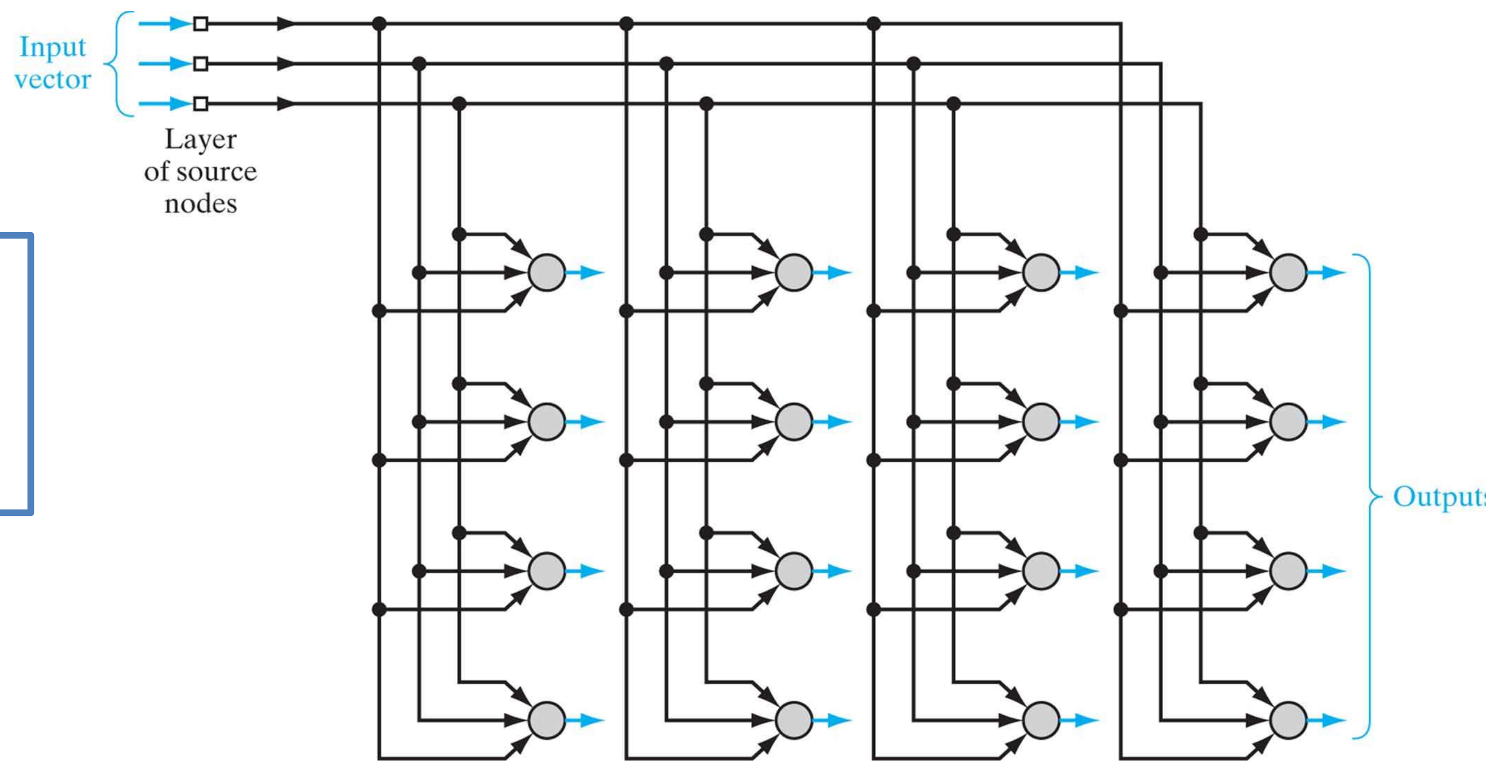
Μοντέλο SOM, *Kohonen* 1982

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

Self-Organizing Maps (SOM) (1/5)

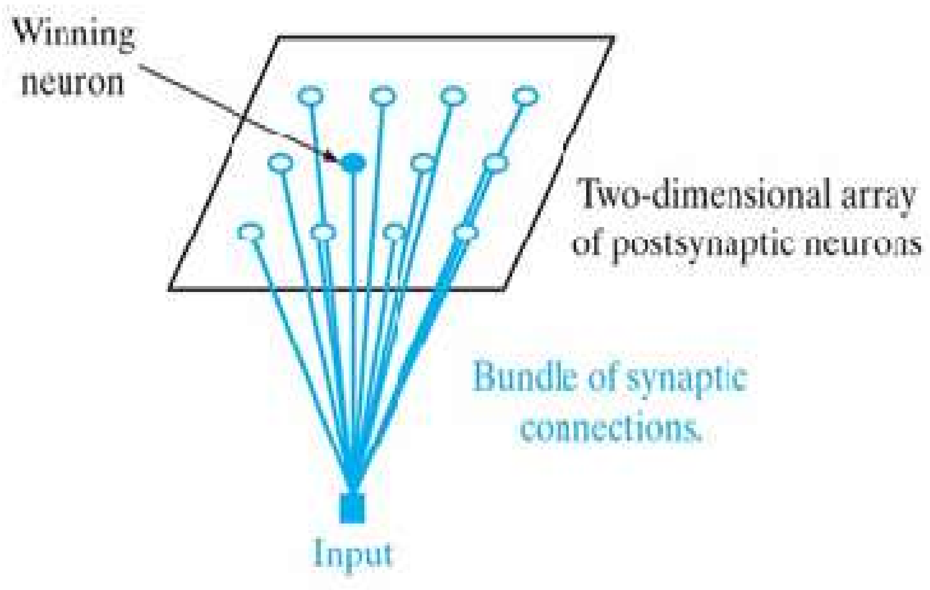
- Ο αλγόριθμος διαμόρφωσης του *feature map* συνδυάζει αρχές νευροφυσιολογίας του ***Hebb*** για τοπολογική αυτό-οργάνωση νευρωνικών δικτύων σε πλέγματα *postsynaptic neurons*
- Αποθηκεύει μέσω μη-επιβλεπόμενης μάθησης *πρότυπα* (*patterns*) που προκύπτουν από το δείγμα μάθησης με επιλογή των σημαντικότερων χαρακτηριστικών τους $l \ll m$ (*data compression*, *dimensionality reduction*)
- Το ήδη διαμορφωμένο δίκτυο ***SOM*** ανασυνθέτει κατ' εκτίμηση και αναγνωρίζει ελλειμματικά ή παραμορφωμένα νέα παραδείγματα (π.χ. λόγω θορύβου) με βάση τη στατιστική συνάφεια προς αποθηκευμένα πρότυπα
- Σύγκριση με *K*-Means Clustering: Με ικανοποιητικό αριθμό νευρώνων το *SOM* υποδεικνύει τον κατάλληλο αριθμό *clusters* (*winning neurons*) χωρίς επαναλήψεις του αλγορίθμου!

Διάταξη Πλέγματος Νευρώνων με Είσοδο 3 Χαρακτηριστικών και 4×4 Διάσταση Εξόδου



Self-Organizing Maps (SOM) (2/5)

- Ο αλγόριθμος ***μη επιβλεπόμενης μάθησης*** ανακαλύπτει τον ***πλησιέστερο*** νευρώνα (*winning neuron*) για κάθε διάνυσμα εισόδου (δειγματικό στοιχείο μάθησης) $\mathbf{x}$ με ***Ανταγωνιστική Διαδικασία*** (*Competition Process*) που μεγιστοποιεί διακριτική συνάρτηση (*discriminant function*)
- Ο *winner* καθορίζει την περιοχή των ενεργών νευρώνων σε ***Συνεργατική Διαδικασία*** (*Cooperation Process*) με γειτονικούς του νευρώνες στο πλέγμα, με αποτέλεσμα την αυτο-οργάνωση ενεργών χαρακτηριστικών σε τοπογραφικό *feature map*
- Σε περιβάλλον *αυτοο-ργάνωσης*, που ακολουθεί τους κανόνες του ***Hebb***, το διάνυσμα των παραμέτρων (συναπτικών βαρών) $\mathbf{w}_j$ αλλάζει με τη διαδοχική είσοδο παραδειγμάτων $\mathbf{x}$. Απαιτείται διόρθωση με ***Διαδικασία Προσαρμογής*** (*Adaptive Process*) που να εγγυάται πως τα βάρη δεν αυξάνουν συνεχώς και επομένως ο επαναληπτικός αλγόριθμος μάθησης είναι ευσταθής



Μοντέλο SOM, *Kohonen* 1982

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

Self-Organizing Maps (SOM) (3/5)

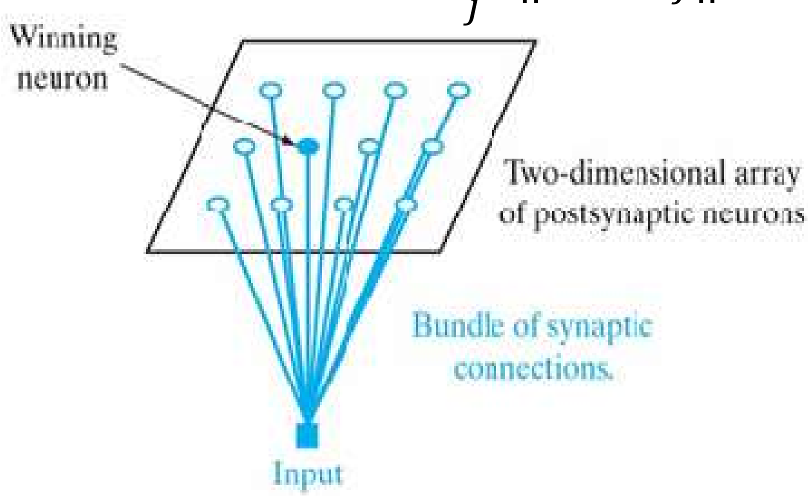
Ανταγωνιστική Διαδικασία

Ο αλγόριθμος ***μη επιβλεπόμενης μάθησης*** ανακαλύπτει τον ***πλησιέστερο*** νευρώνα j (*winner*) για κάθε διάνυσμα εισόδου (δειγματικό στοιχείο, παράδειγμα μάθησης) $\mathbf{x}$ με ***ανταγωνισμό*** (*Competition*) που μεγιστοποιεί διακριτική συνάρτηση (*discriminant function*) ανάλογη με το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{w}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$

- Για κάθε παράδειγμα μάθησης $\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_m]^{\mathrm{T}}$ επιλέγεται διάνυσμα συναπτικών βαρών $\mathbf{w}_j = \left[w_{j1}\ w_{j2}\ \ldots\ w_{jm}\right]^{\mathrm{T}}$ προς τους $j = 1,2,\ldots,l$ *postsynaptic neurons* του πλέγματος

- Επιλέγεται σαν *winning neuron* ο νευρώνας $i(\mathbf{x})$ με το μέγιστο εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{w}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ σαν το κέντρο διέγερσης της περιοχής του πλέγματος. Η επιλογή του ισοδυναμεί με το σημείο ελάχιστης Ευκλείδειας απόστασης μεταξύ των διανυσμάτων $\mathbf{x}$ και $\mathbf{w}_j$ αν $\left\|\mathbf{w}_j\right\| = 1$ οπότε

$$i(\mathbf{x}) = \arg\min_j \left\|\mathbf{x} - \mathbf{w}_j\right\|$$



Μοντέλο SOM, *Kohonen* 1982

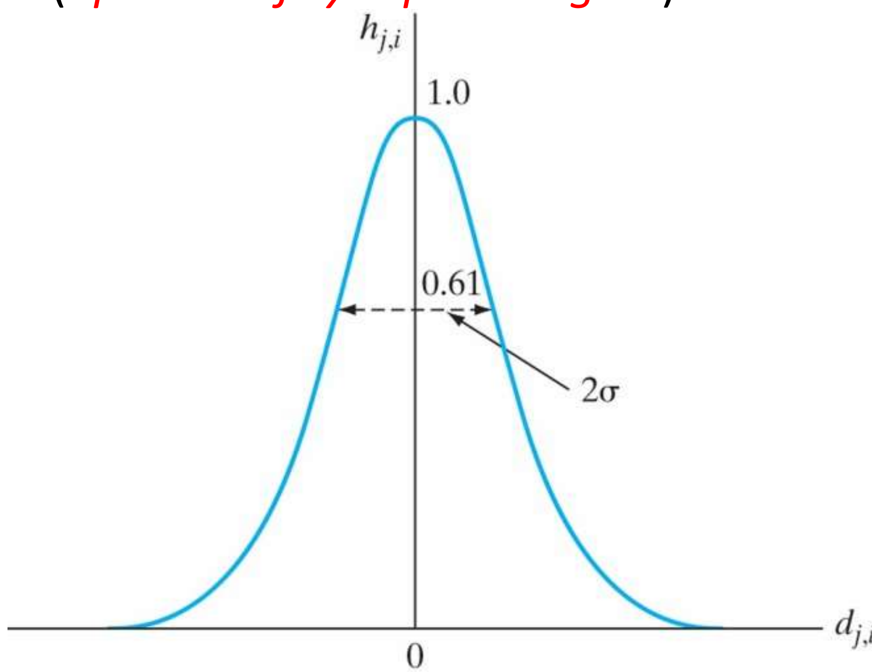
Self-Organizing Maps (SOM) (4/5)

Συνεργατική Διαδικασία

- Ο *winning neuron* $i(\mathbf{x})$ προσδιορίζει περιοχή $h_{j,i(\mathbf{x})}$ διεγερμένων γειτονικών νευρώνων j σε απόσταση (*lateral distance*) $d_{j,i(x)}$

- Συνήθης επιλογή: *Gaussian Function* $h_{j,i(\mathbf{x})} = \exp\left(-\frac{d_{j,i(x)}^2}{2\sigma^2}\right)$

- Η παράμετρος σ μπορεί να μειώνεται όσο προχωράει η διαδικασία μάθησης, μειώνοντας τις χωρικές εξαρτήσεις (*correlations*) των νευρώνων στο πλέγμα και τον χρόνο ανανέωσης των συναπτικών βαρών (*updates of synaptic weights*)



ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

Self-Organizing Maps (SOM) (5/5)

Διαδικασία Προσαρμογής

- Σε περιβάλλον *αυτό-οργάνωσης*, που ακολουθεί τους κανόνες του ***Hebb***, το διάνυσμα των παραμέτρων (συναπτικών βαρών) $\mathbf{w}_j$ αλλάζει με τη διαδοχική είσοδο παραδειγμάτων $\mathbf{x}$
- Απαιτείται διόρθωση που να εγγυάται πως τα βάρη δεν αυξάνουν συνεχώς και επομένως ο επαναληπτικός αλγόριθμος μάθησης είναι ευσταθής
- Ορισμός **όρου λήθης** (*forgetting term*) $g(y_i)\mathbf{w}_j$ όπου $g(y_i)$ θετική συνάρτηση της εξόδου y_i με $g(y_i) = 0$ για $y_i = 0$
- Οι επαναλήψεις προσδιορισμού των συναπτικών βαρών οδηγούνται από τις διαφορές

$$\Delta\mathbf{w}_j = \eta y_i \mathbf{x} - g(y_i)\mathbf{w}_j$$

η: *learning hyperparameter*,

$y_i\mathbf{x}$: *Hebbian term*

$g(y_i)\mathbf{w}_j$: *forgetting term*

- Με γραμμικό ορισμό του *forgetting term* $g(y_i) = \eta y_i$ και με $y_i = h_{j,i(\mathbf{x})}$ έχουμε

$\Delta\mathbf{w}_j = \eta h_{j,i(\mathbf{x})}(\mathbf{x} - \mathbf{w}_j)$ όπου $i(\mathbf{x})$ ο *winning neuron* για είσοδο $\mathbf{x}$

- Στην επανάληψη $n \to n + 1$ με μειούμενη υπερπαράμετρο $\eta(n)$:

$$\mathbf{w}_j(n+1) = \mathbf{w}_j(n) + \eta(n) h_{j,i(\mathbf{x})}(n)(\mathbf{x}(n) - \mathbf{w}_j(n))$$

- Τα συναπτικά βάρη του *winning neuron* τείνουν προς το παράδειγμα εισόδου $\mathbf{x}$ και τα συναπτικά βάρη των νευρώνων της γειτονιάς του τείνουν στατιστικά προς την κατανομή του δείγματος των $\mathbf{x}$

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

Autoencoders

Encoder:

Input $\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_m]^{\mathrm{T}}$

Output $\mathbf{h} = \mathbf{F_e}(\mathbf{x}) = [h_1\ h_2\ \ldots\ h_l]^{\mathrm{T}},\ l \ll m$ (*code*, *latent variables*)

Decoder:

Input $\mathbf{h} = [h_1\ h_2\ \ldots\ h_l]^{\mathrm{T}}$

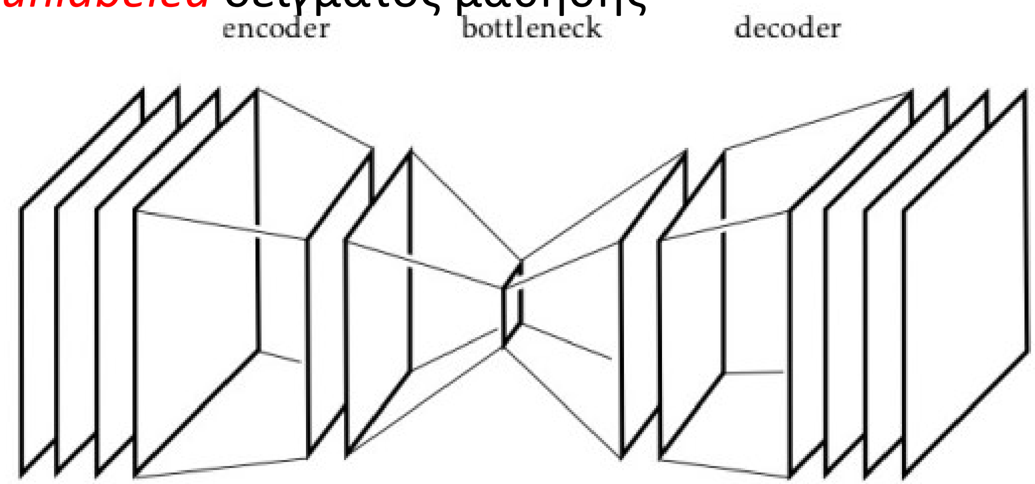
Output $\mathbf{x}' = \mathbf{F_d}(\mathbf{h}) = [x_1{}'\ x_2{}'\ \ldots\ x_m{}']^{\mathrm{T}}$ (*reconstruction* του $\mathbf{x}$)

Bottleneck:

Ενδιάμεσα Στρώματα Κρυφών Νευρώνων που επεξεργάζονται τις l *latent variables*

Αλγόριθμος Μάθησης (*Unsupervised Learning*):

Ελαχιστοποίηση απόκλισης $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2$ με επαναλήψεις *backpropagation* σε εισόδους στοιχείων *unlabeled* δείγματος μάθησης



Ο *decoder* δεν είναι απαραίτητος **μετά** τη διαδικασία μάθησης – ρύθμισης των παραμέτρων του *encoder* για κωδικοποίηση μέσω τροποποιημένων σημαντικών χαρακτηριστικών του δείγματος (*latent variables*)

- Οι *latent variables* αποκαλύπτουν *reduced feature maps*. Αν τα νευρωνικά δίκτυα είναι γραμμικά με μηδενικά *bias* αποτελούν τις l κύριες συνιστώσες *unlabeled* δείγματος
- Μπορούν να χρησιμοποιηθούν για *image compression*, *pattern recognition*, διόρθωση & συμπλήρωση ατελών δειγματικών στοιχείων, ανίχνευση ανωμαλιών κλπ. όταν δεν είναι διαθέσιμο *labeled training dataset*