



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Τομέας Επικοινωνιών, Ηλεκτρονικής & Συστημάτων Πληροφορικής

Εργαστήριο Διαχείρισης και Βέλτιστου Σχεδιασμού Δικτύων - NETMODE

<http://www.netmode.ntua.gr>

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

Ροή Δ - 6^ο εξάμηνο, κωδικός 3.5.19.6

καθ. Βασίλης Μάγκλαρης

maglaris@netmode.ntua.gr

2018

Οι σημειώσεις του μαθήματος βασίστηκαν στις παραδόσεις που έγιναν το ακαδημαϊκό έτος 2016 - 2017 στο Ε.Μ.Π.

Οι σημειώσεις του μαθήματος ανανεώνονται σε κάθε ακαδημαϊκό έτος και παρέχονται μαζί με συγχρονισμένο υλικό video/audio των διαλέξεων μέσω του εργαλείου καταγραφής μαθησιακού υλικού **SelCont** (*Synchronized eLearning Content*) στο

http://www.netmode.ntua.gr/main/index.php?option=com_content&task=view&id=130&Itemid=48

Πληροφορίες για το SelCont:

Το Εργαστήριο Διαχείρισης και Βέλτιστου Σχεδιασμού Δικτύων Τηλεματικής (NETMODE) της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχ. & Μηχ. Υπολογιστών του Ε.Μ.Π. υλοποίησε το εργαλείο SelCont για την καταγραφή και αναπαραγωγή διαλέξεων μέσα από αίθουσες διδασκαλίας με ελάχιστες απαιτήσεις εξοπλισμού (απλή camera και laptop/tablet).

Το εργαλείο συγχρονίζει βίντεο με διαφάνειες και οθόνες (screenshots) από τον υπολογιστή του παρουσιαστή (MS Windows, Android) και διαθέτει το τελικό αποτέλεσμα μέσω του Internet. Το αποτέλεσμα μπορεί να διατεθεί και σαν link σε οποιαδήποτε σελίδα web (MyCourses, moodle, websites εργαστηρίων κλπ.).

Demo του SelCont υπάρχει στο:

<http://webvm.netmode.ntua.gr/courses/?lectures=introduction-to-selcont>

Η συγχρονισμένη παρουσίαση καλείται από οποιονδήποτε browser σε laptop, desktop, tablet, smart phone του τελικού χρήστη (σπουδαστή) και το αποθηκευμένο υλικό (ppt's με ή χωρίς annotations, Internet screenshots κλπ.) προβάλλεται σε διαμορφωμένη σελίδα web. Στην ίδια σελίδα εμφανίζεται σε ξεχωριστό πλαίσιο το συγχρονισμένο online video-audio (αποθηκευμένο στο YouTube).

Κατά την αναπαραγωγή του, το video συγχρονίζεται με το υλικό της παρουσίασης αυτόματα ή με επιλογή της αποθηκευμένης διαφάνειας - screenshot μέσω εικονιδίων (thumbnails) κάτω από το πλαίσιο του video.

Οι διαφάνειες σε αρχείο ppt είναι διαθέσιμες για downloading από την σελίδα web της παρουσίασης.

1^ο Μάθημα

Εισαγωγή (1/2)

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ (1/3)

http://www.netmode.ntua.gr/main/index.php?option=com_content&task=view&id=130&Itemid=48

1. Εισαγωγή

- Περιεχόμενα
- Γενική Περιγραφή Συστημάτων Αναμονής
- Τεχνικές Μελέτης & Αξιολόγησης Επίδοσης Συστημάτων Αναμονής
- Μοντέλα Τηλεπικοινωνιακών & Υπολογιστικών Συστημάτων

2. Εισαγωγή στη Θεωρία Ουρών.

- Χαρακτηριστικά & Παράμετροι Συστημάτων Αναμονής
- Μήκος Ουράς, Χρόνος Καθυστέρησης
- Νόμος Little

3. Γνώσεις από Θεωρία Πιθανοτήτων

- Εκθετική Κατανομή
- Κατανομή Poisson
- Ιδιότητα Απώλειας Μνήμης (Markov)
- Στοχαστικές Ανελίζεις

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ (2/3)

4. Μοντέλο Γεννήσεων - Θανάτων (Birth - Death Processes).
5. Συστήματα Markov και Εξισώσεις Ισορροπίας
 - Ανάλυση απλών ουρών M/M/1
6. Άλλες ουρές Markov
 - Μεταβάσεις Εξαρτώμενες από την Κατάσταση
 - Ουρές με Απώλειες (M/M/1/N)
 - Ουρές με Πολλαπλούς Εξυπηρετητές: M/M/m, M/M/m/K, M/M/m/m (Erlang – B)

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ (3/3)

7. Προσομοίωση Απλών Συστημάτων Αναμονής
8. Ανοικτά και Κλειστά Δίκτυα Ουρών
9. Ουρές με μη Εκθετική Εξυπηρέτηση
 - Ιδιότητα PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages)
 - Απόδειξη Τύπου Little
 - Στοιχεία Θεωρίας Αναγεννήσεων (Renewal Theory)
 - Ενσωματωμένη Αλυσίδα Markov (Embedded Markov Chain)
 - Ανάλυση Ουράς M/G/1
10. Παραδείγματα & Εφαρμογές
 - Ανάλυση Υπολογιστικών Συστημάτων
 - Ανάλυση & Σχεδίαση Τηλεφωνικών Κέντρων
 - Ανάλυση Δικτύων Internet

ΜΟΝΤΕΛΑ ΣΥΜΦΟΡΗΣΗΣ (Congestion)

- Κυκλοφοριακή κίνηση
- Ουρές σε καταστήματα, ταχυδρομεία, τράπεζες
 - Πολλαπλοί εξυπηρετητές (servers)
 - Κοινή ουρά ή παράλληλες ουρές, προτεραιότητες
- Τηλεφωνικά κέντρα (πολλαπλοί εξυπηρετητές)
- Κόμβοι δικτύων τύπου Internet
- Πόροι υπολογιστικών συστημάτων (CPU, Μνήμη, Δίσκοι)

ΚΟΙΝΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ (1/2)

- **Πελάτης:** Πελάτης τράπεζας, τηλεφωνική κλήση, πακέτο δεδομένων Internet...
- Εξυπηρετητής (**server**): Ταμίας, τηλεπικοινωνιακός πόρος (γραμμή) αφιερωμένος σε τηλεφωνική κλήση ή προώθηση πακέτου...
- Τυχαία είσοδος πελατών – «γεννήσεις», μέσος ρυθμός αφίξεων: λ πελάτες/sec
- Χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων - τυχαία μεταβλητή a , μέσος όρος: $E(a) = 1/\lambda$ sec
- Μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης πελατών: μ πελάτες/sec
- Χρόνος εξυπηρέτησης πελάτη – τυχαία μεταβλητή s , μέσος όρος: $E(s) = 1/\mu$ sec/πελάτη

ΚΟΙΝΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ (2/2)

- Ουρά αναμονής (**queue**) για εξομάλυνση στατιστικών μεταβολών και απομόνωση (**buffering**) διακυμάνσεων εισόδου – εξυπηρέτησης
- Χωρητικότητα συστήματος αποθήκευσης (**queue size**) συμπεριλαμβανομένων των πελατών υπό εξυπηρέτηση
- Αριθμός εξυπηρετητών
- Πρωτόκολλο εξυπηρέτησης: First Come First Served - FCFS ή First In First Out - FIFO, Last In First Out - LIFO, Processor Sharing, προτεραιότητες
- **Κατάσταση συστήματος $n(t)$** : Αριθμός πελατών στο σύστημα αναμονής (ουρά + εξυπηρέτηση) σε μια χρονική στιγμή. Χρονοσειρά - time series - ή στοχαστική ανέλιξη - stochastic process - διακριτής κατάστασης & συνεχούς χρόνου
- Δρομολόγηση από ουρά σε ουρά σε περιπτώσεις δικτύων ουρών αναμονής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

- **Στοιχεία καθυστέρησης σε ένα σύστημα:** χρόνος επεξεργασίας, χρόνος αναμονής, χρόνος διάδοσης, χρόνος μετάδοσης
- **Δίκτυο μεταγωγής κυκλωμάτων (circuit switching):** ρυθμός αφίξεων κλήσεων, διάρκεια κλήσεων, ποσοστό απόρριψης κλήσεων
- **Δίκτυο μεταγωγής πακέτων (packet switching):** ρυθμός αφίξεων πακέτων, μέγεθος πακέτων, ποσοστό απόρριψης πακέτων, καθυστέρηση σε κόμβους του Internet
- **Υπολογιστικό σύστημα πολυεπεξεργασίας (windows):** αριθμός παράλληλων εντολών/προγραμμάτων υπό επεξεργασία, χρόνος ύπνωσης (sleeping time) ανά ενεργό παράθυρο, χρόνος αναζήτησης/ανταλλαγής δεδομένων στη μνήμη (I/O time), μέσος ρυθμός διεκπεραίωσης εντολών (ρυθμαπόδοση - throughput), χρόνος απόκρισης

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

- **Αναλυτική ή/και αριθμητική αξιολόγηση** απλοποιημένων μοντέλων συστημάτων ΤΠΕ (Τεχνολογιών Πληροφορικής & Επικοινωνιών) για προσέγγιση βασικών παραμέτρων σχεδιασμού (π.χ. χωρητικότητας γραμμών, μεγέθους buffer, τοπολογία δικτύου)
- **Προσομοίωση (simulation)** για αξιολόγηση και προσδιορισμό παραμέτρων προτεινόμενων λύσεων ώστε να ικανοποιούνται προδιαγραφές QoS (Quality of Service)

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

- **Αναλυτική ή/και αριθμητική αξιολόγηση** απλοποιημένων μοντέλων συστημάτων ΤΠΕ (Τεχνολογιών Πληροφορικής & Επικοινωνιών) για προσέγγιση βασικών παραμέτρων σχεδιασμού (π.χ. χωρητικότητας γραμμών, μεγέθους buffer, τοπολογία δικτύου)
- **Προσομοίωση (simulation)** για αξιολόγηση και προσδιορισμό παραμέτρων προτεινόμενων λύσεων ώστε να ικανοποιούνται προδιαγραφές QoS (Quality of Service) και QoE (Quality of Experience) με οικονομία σε CAPEX (Capital Expenses) & OPEX (Operational Expenses)
- **Εξομοίωση (emulation)** με διαμόρφωση εικονικών (virtual) υποδομών και πειραματισμό κάτω από τεχνητές ακραίες συνθήκες (επιθέσεις, καταστροφές...)
- **Δοκιμές** σε αληθινά συστήματα στο εργαστήριο και ανάλυση συμπεριφοράς κάτω από τυποποιημένα ενδεικτικά σενάρια χρήσης - benchmarking
- **Συνεχείς μετρήσεις** σε εγκατεστημένα συστήματα και αξιολόγηση εναλλακτικών σεναρίων αναβάθμισης - επανασχεδιασμού

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ (1/4)

– Ένταση φορτίου (traffic intensity)

Σε περίπτωση 1 ουράς, 1 εξυπηρετητή:

{Μέσος **Χρόνος εξυπηρέτησης**}/ {Μέσος **Χρόνος μεταξύ αφίξεων**}

$$\rho \triangleq \frac{\left(\frac{1}{\mu}\right)}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \lambda E(s) = \lambda/\mu \text{ (Erlangs)}$$

Ένα **Erlang** αντιπροσωπεύει το φόρτο κυκλοφορίας που εξυπηρετείται από έναν εξυπηρετητή που ασχολείται το 100% του χρόνου (π.χ. 1 call-minute per minute). Ένας εξυπηρετητής ασχολείται για 30 λεπτά σε μια περίοδο μιας ώρας
→ μεταφέρει 0.5 Erlangs κυκλοφοριακή ένταση

– Διεκπεραίωση πελατών – Ρυθμαπόδοση (Throughput) γ πελάτες/sec

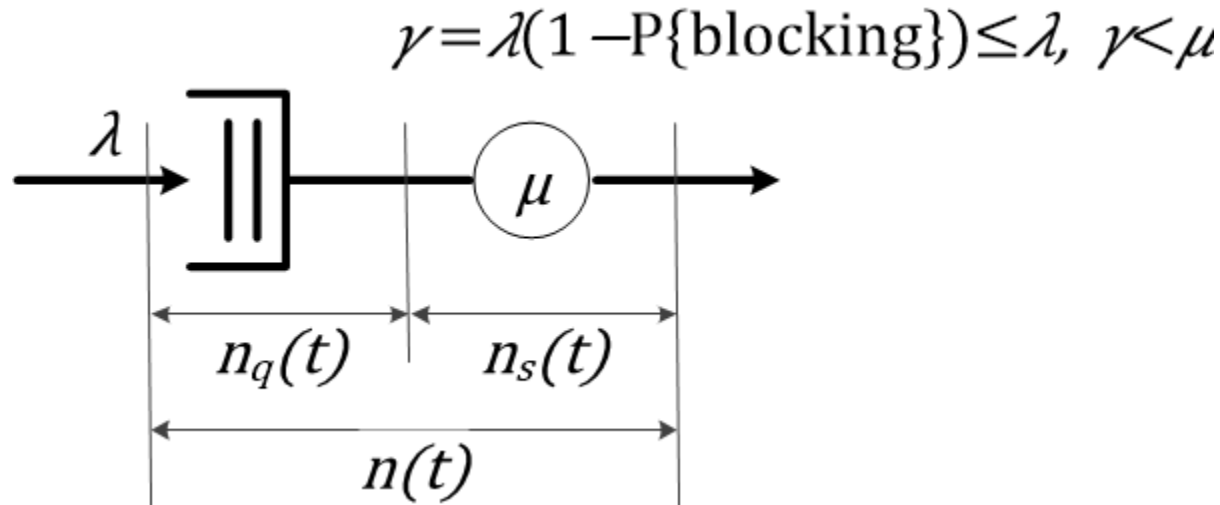
Σε περίπτωση 1 ουράς, 1 εξυπηρετητή:

$$\gamma = \lambda(1 - P\{\text{blocking}\}) \leq \lambda, \quad \gamma < \mu$$

όπου $P\{\text{blocking}\}$ είναι η πιθανότητα να χαθεί ένας πελάτης επειδή βρήκε το σύστημα πλήρες

- σε τηλεφωνικά δίκτυα: βαθμός ποιότητας, **Grade of Service - GoS**
- σε δίκτυα δεδομένων: μία παράμετρος ποιότητας υπηρεσίας, **Quality of Service - QoS**

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ (2/4)



– Μέσος ρυθμός απωλειών, ποσοστό απωλειών, πιθανότητα απώλειας πελάτη

- Σε περίπτωση 1 ουράς, 1 εξυπηρετητή

Μέσος ρυθμός απωλειών: $\lambda - \gamma$

Ποσοστό απωλειών: $\frac{\lambda - \gamma}{\lambda} = P\{\text{blocking}\}$

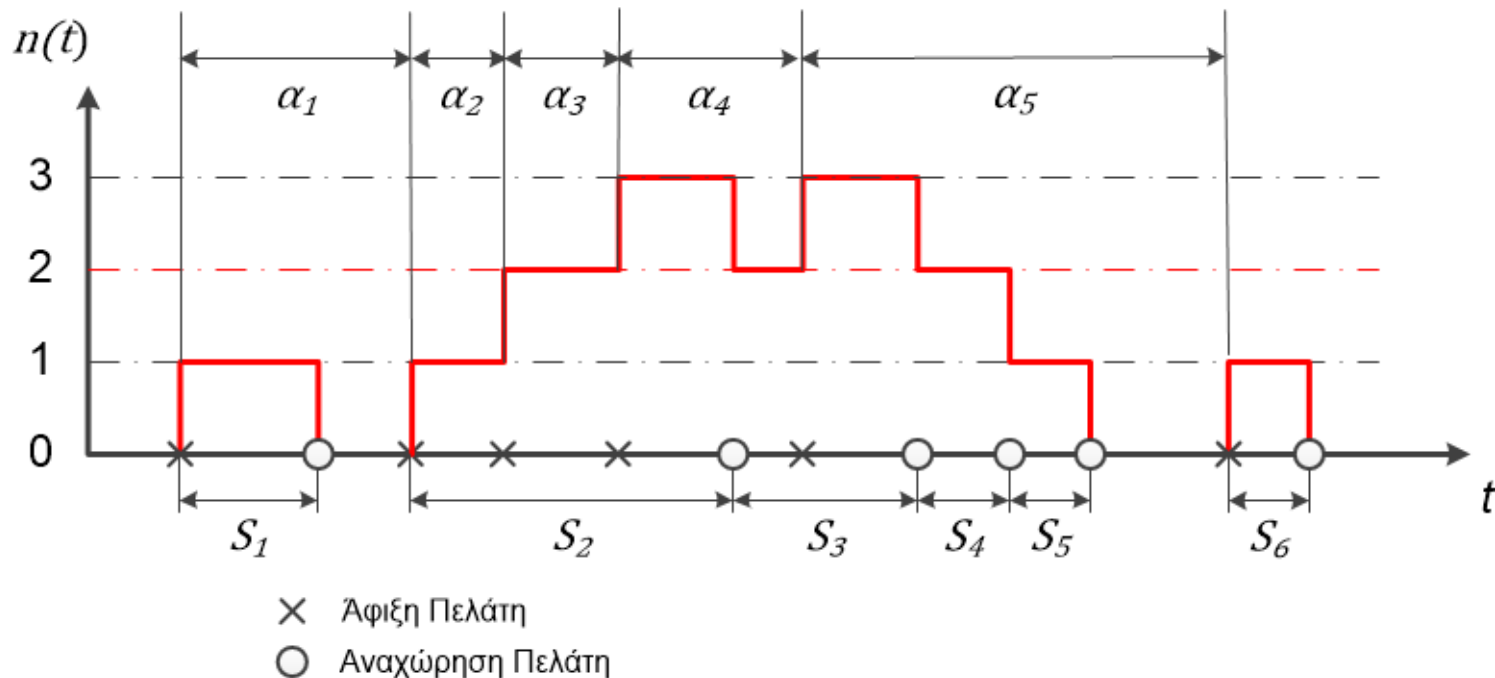
– Βαθμός χρησιμοποίησης εξυπηρετητή (server utilization)

- Σε περίπτωση 1 ουράς, 1 εξυπηρετητή

$$u \triangleq \gamma / \mu$$

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ (3/4)

Εξέλιξη Αριθμού Πελατών στο Σύστημα



- **Αριθμός πελατών (κατάσταση)**

$n(t)$, στοχαστική ανέλιξη – χρονοσειρά
(stochastic process, time series)

- **Μέσος αριθμός πελατών $E\{n(t)\}$**

- **Μέσος χρόνος καθυστέρησης (average time delay)**

Μέσος χρόνος αναμονής (waiting time) + Μέσος χρόνος εξυπηρέτησης

$$E(T) = E(W) + E(s)$$

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ (4/4)

- $n(t) = 0, 1, 2, \dots, K$: Τυχαία μεταβλητή που ορίζει την **κατάσταση** του Συστήματος Αναμονής την χρονική στιγμή t . Η τυχαία συνάρτηση $n(t)$ αποτελεί **στοχαστική ανέλιξη** (διαδικασία) διακριτής κατάστασης με μεταβάσεις καταστάσεων σε συνεχή χρόνο (**discrete state, continuous time stochastic process**)

$$n(t) = n_q(t) + n_s(t) \leq K \text{ όπου:}$$

K η μέγιστη χωρητικότητα συστήματος

$n_q(t) = 0, 1, 2, \dots, K - 1$ ο αριθμός πελατών σε αναμονή

$n_s(t) = 0, 1$ ο αριθμός πελατών στην εξυπηρέτηση

- $P_k(t) = P\{n(t) = k\}$: Η πιθανότητα παρουσίας k πελατών (σε αναμονή και εξυπηρέτηση) τη χρονική στιγμή t
- Σύστημα σε ισορροπία: $\lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t) = P_k > 0$ (**εργοδικές οριακές πιθανότητες**). Οι καταστάσεις $n(t) = k$ συστήματος σε ισορροπία είναι απείρως επισκέψιμες (**positive recurrent**): Μετά από παρέλευση μεγάλου χρονικού διαστήματος t , το μεταβατικό φαινόμενο παρέρχεται και οι αρχικές συνθήκες δεν επηρεάζουν την περαιτέρω εξέλιξη του συστήματος που παλινδρομεί τυχαία ανάμεσα στις απείρως επισκέψιμες καταστάσεις
- Μέσοι όροι των $n(t), n_q(t), n_s(t)$: $E\{n(t)\} = E\{n_q(t)\} + E\{n_s(t)\}$
- Χρόνος καθυστέρησης (αναμονή + εξυπηρέτηση) συστήματος σε ισορροπία:
$$T = W + s, E(T) = E(W) + E(s)$$

ΤΥΠΟΣ Little

(Σύστημα σε Ισορροπία)

Χρόνος καθυστέρησης: $T = W + s$

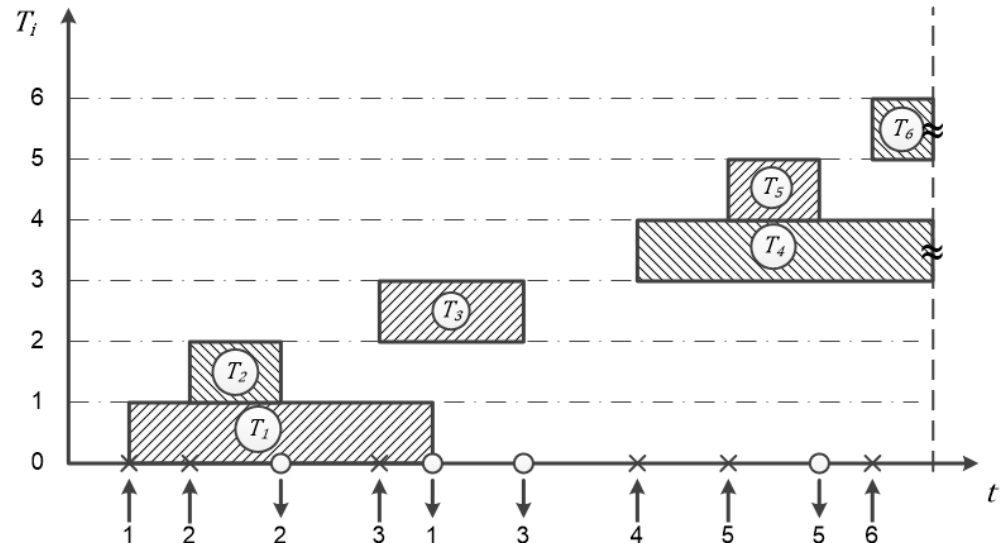
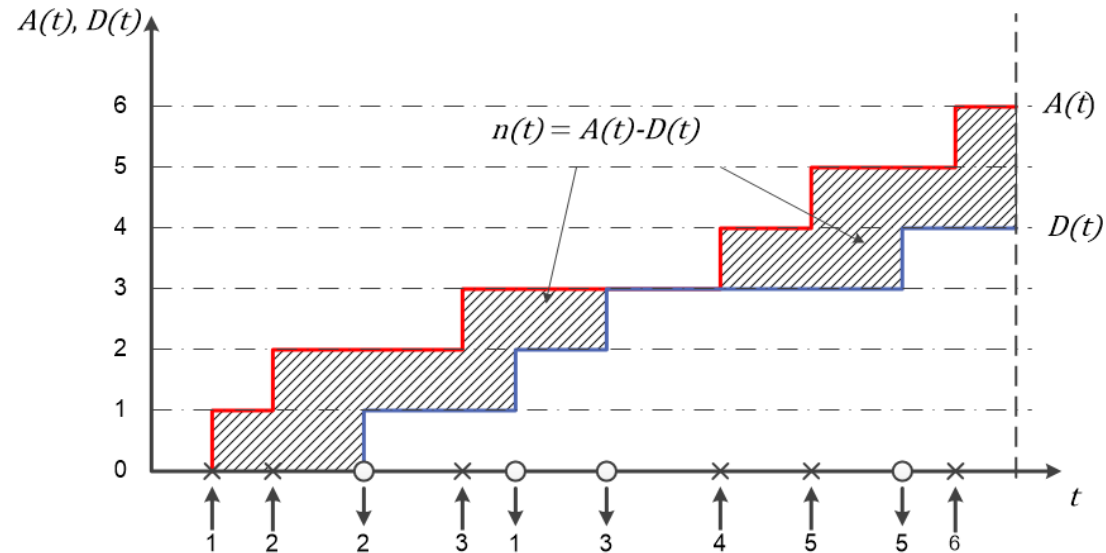
Τύπος Little:

$$\begin{aligned} E(T) &= \frac{E\{n(t)\}}{\gamma} = E(W) + E(s) \\ &= \frac{E\{n_q(t)\}}{\gamma} + \frac{E\{n_s(t)\}}{\gamma} \end{aligned}$$

Για ουρά με **ένα** εξυπηρετητή:

$$\begin{aligned} E\{n_s(t)\} &= \gamma E(s) = \frac{\gamma}{\mu} \\ &= 0 \cdot P\{n(t) = 0\} \\ &\quad + P\{n(t) > 0\} = P\{n(t) > 0\} \end{aligned}$$

(ο βαθμός χρησιμοποίησης του
εξυπηρετητή $u = \frac{\gamma}{\mu} = P\{n(t) > 0\}$)



ΚΑΤΑΤΑΞΗ ΟΥΡΩΝ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

- **A/S/N/K**
 - A : Τύπος διαδικασίας εισόδου πελατών
 - S : Τύπος τυχαίας μεταβλητής χρόνου εξυπηρέτησης
 - N: Αριθμός εξυπηρετητών
 - K : Χωρητικότητα συστήματος (μέγιστος αριθμός πελατών στην αναμονή + εξυπηρέτηση)
- *Παραδείγματα*
 - **M/M/1**: Αφίξεις Poisson (*Markov, Memoryless*), ανεξάρτητοι χρόνοι εξυπηρέτησης εκθετικοί (*Markov*), 1 εξυπηρετητής, άπειρη χωρητικότητα συστήματος (μηδενικές απώλειες ή αστάθεια)
 - **M/D/1**: Αφίξεις Poisson (*Markov, Memoryless*), ανεξάρτητοι χρόνοι εξυπηρέτησης σταθεροί (*Deterministic*), 1 εξυπηρετητής, άπειρη χωρητικότητα συστήματος
 - **M/G/1/4**: Αφίξεις Poisson (*Markov, Memoryless*), ανεξάρτητοι χρόνοι εξυπηρέτησης γενικής κατανομής (*General*), 1 εξυπηρετητής, χωρητικότητα συστήματος 4 πελάτες
 - **M/M/4/8**: Αφίξεις Poisson (*Markov, Memoryless*), ανεξάρτητοι χρόνοι εξυπηρέτησης εκθετικοί (*Markov*), 4 εξυπηρετητές, χωρητικότητα συστήματος 8 πελάτες: Μοντέλο κέντρου κλήσεων (*call center*) με 4 χειριστές
 - τηλεφωνητές & μέχρι 4 κλήσεις στην αναμονή

2^ο Μάθημα

Εισαγωγή (2/2)

Επισκόπηση Γνώσεων Πιθανοτήτων (1/2)

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ (1/4)

(Επανάληψη)

– Ένταση φορτίου (traffic intensity)

Σε περίπτωση 1 ουράς, 1 εξυπηρετητή:

{Μέσος **Χρόνος εξυπηρέτησης**}/ {Μέσος **Χρόνος μεταξύ αφίξεων**}

$$\rho \triangleq \frac{\left(\frac{1}{\mu}\right)}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \lambda E(s) = \lambda/\mu \text{ (Erlangs)}$$

Ένα **Erlang** αντιπροσωπεύει το φόρτο κυκλοφορίας που εξυπηρετείται από έναν εξυπηρετητή που ασχολείται το 100% του χρόνου (π.χ. 1 call-minute per minute). Ένας εξυπηρετητής ασχολείται για 30 λεπτά σε μια περίοδο μιας ώρας
→ μεταφέρει 0.5 Erlangs κυκλοφοριακή ένταση

– Διεκπεραίωση πελατών – Ρυθμαπόδοση (Throughput) γ πελάτες/sec

Σε περίπτωση 1 ουράς, 1 εξυπηρετητή:

$$\gamma = \lambda(1 - P\{\text{blocking}\}) \leq \lambda, \quad \gamma < \mu$$

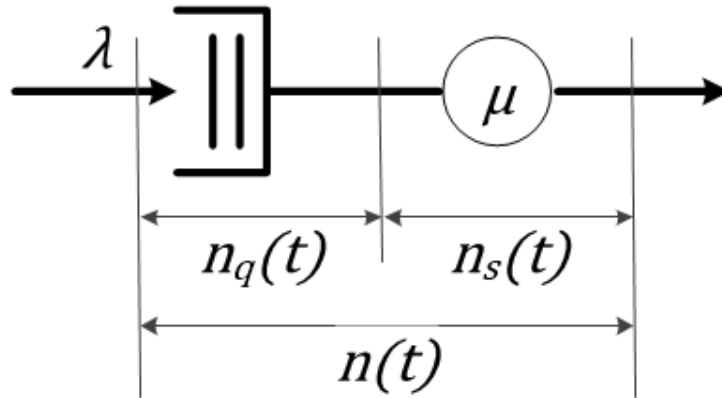
όπου $P\{\text{blocking}\}$ είναι η πιθανότητα να χαθεί ένας πελάτης επειδή βρήκε το σύστημα πλήρες

- σε τηλεφωνικά δίκτυα: βαθμός ποιότητας, **Grade of Service - GoS**
- σε δίκτυα δεδομένων: μία παράμετρος ποιότητας υπηρεσίας, **Quality of Service - QoS**

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ (2/4)

(Επανάληψη)

$$\gamma = \lambda(1 - P\{\text{blocking}\}) \leq \lambda, \quad \gamma < \mu$$



– Μέσος ρυθμός απωλειών, ποσοστό απωλειών, πιθανότητα απώλειας πελάτη

- Σε περίπτωση 1 ουράς, 1 εξυπηρετητή
Μέσος ρυθμός απωλειών: $\lambda - \gamma$
Ποσοστό απωλειών: $\frac{\lambda - \gamma}{\lambda} = P\{\text{blocking}\}$

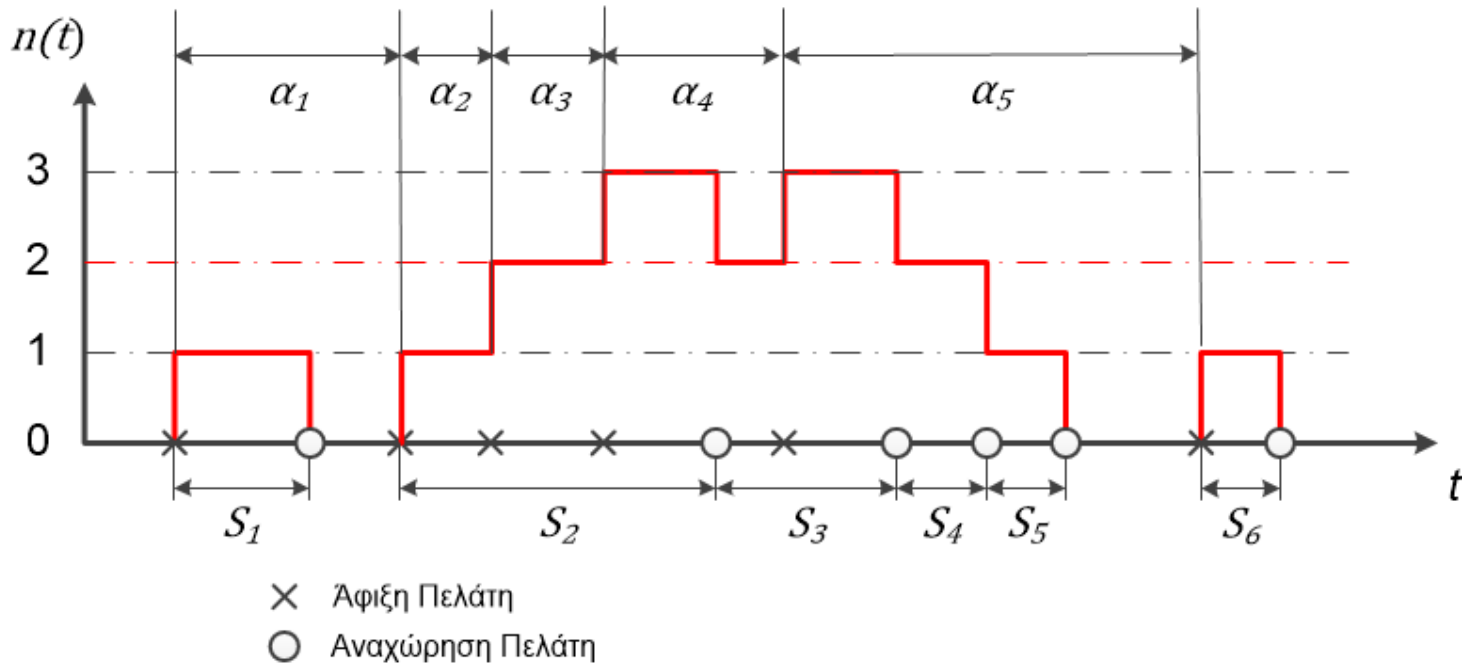
– Βαθμός χρησιμοποίησης εξυπηρετητή (server utilization)

- Σε περίπτωση 1 ουράς, 1 εξυπηρετητή
 $u \triangleq \gamma / \mu$

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ (3/4)

(Επανάληψη)

Εξέλιξη Αριθμού Πελατών στο Σύστημα



– Αριθμός πελατών (κατάσταση)

$n(t)$, στοχαστική ανέλιξη – χρονοσειρά
(stochastic process, time series)

– Μέσος αριθμός πελατών $E\{n(t)\}$

– Μέσος χρόνος καθυστέρησης (average time delay)

Μέσος χρόνος αναμονής (waiting time) + Μέσος χρόνος εξυπηρέτησης

$$E(T) = E(W) + E(s)$$

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ (4/4)

- $n(t) = 0, 1, 2, \dots, K$: Τυχαία μεταβλητή που ορίζει την **κατάσταση** του Συστήματος Αναμονής την χρονική στιγμή t . Η τυχαία συνάρτηση $n(t)$ αποτελεί **στοχαστική ανέλιξη** (διαδικασία) διακριτής κατάστασης με μεταβάσεις καταστάσεων σε συνεχή χρόνο (**discrete state, continuous time stochastic process**)

$$n(t) = n_q(t) + n_s(t) \leq K \text{ όπου:}$$

K η μέγιστη χωρητικότητα συστήματος

$n_q(t) = 0, 1, 2, \dots, K - 1$ ο αριθμός πελατών σε αναμονή

$n_s(t) = 0, 1$ ο αριθμός πελατών στην εξυπηρέτηση

- $P_k(t) = P\{n(t) = k\}$: Η πιθανότητα παρουσίας k πελατών (σε αναμονή και εξυπηρέτηση) τη χρονική στιγμή t
- Σύστημα σε ισορροπία: $\lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t) = P_k > 0$ (**εργοδικές οριακές πιθανότητες**). Οι καταστάσεις $n(t) = k$ συστήματος σε ισορροπία είναι απείρως επισκέψιμες (**positive recurrent**): Μετά από παρέλευση μεγάλου χρονικού διαστήματος t , το μεταβατικό φαινόμενο παρέρχεται και οι αρχικές συνθήκες δεν επηρεάζουν την περαιτέρω εξέλιξη του συστήματος που παλινδρομεί τυχαία ανάμεσα στις απείρως επισκέψιμες καταστάσεις
- Μέσοι όροι των $n(t), n_q(t), n_s(t)$: $E\{n(t)\} = E\{n_q(t)\} + E\{n_s(t)\}$
- Χρόνος καθυστέρησης (αναμονή + εξυπηρέτηση) συστήματος σε ισορροπία:
$$T = W + s, E(T) = E(W) + E(s)$$

ΤΥΠΟΣ Little

(Σύστημα σε Ισορροπία)

Χρόνος καθυστέρησης: $T = W + s$

Τύπος Little:

$$\begin{aligned} E(T) &= \frac{E\{n(t)\}}{\gamma} = E(W) + E(s) \\ &= \frac{E\{n_q(t)\}}{\gamma} + \frac{E\{n_s(t)\}}{\gamma} \end{aligned}$$

Μη αυστηρή απόδειξη:

$A(T)$: Συνολικός αριθμός αφίξεων στο $(0, T)$

$D(T)$: Συνολικός αριθμός αναχωρήσεων στο $(0, T)$

$$\gamma \approx \frac{A(T)}{T}, \quad T \rightarrow \infty$$

$E\{n(t)\} \approx \frac{1}{T} \int_0^T [A(t) - D(t)] dt$: Μέσος όρος του $n(t)$, $T \rightarrow \infty$

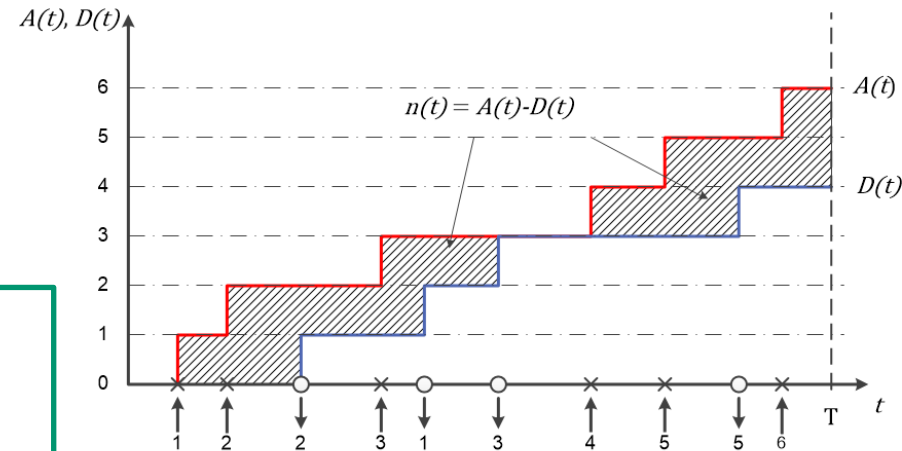
$$E(T) \approx \frac{1}{A(T)} \sum_{i=1}^{A(T)} T_i \approx \frac{1}{A(T)} \int_0^T [A(t) - D(t)] dt \approx \frac{E\{n(t)\}}{\gamma}$$

Για ουρά με **ένα** εξυπηρετητή:

$$\begin{aligned} E\{n_s(t)\} &= \gamma E(s) = \frac{\gamma}{\mu} \\ &= 0 \cdot P\{n(t) = 0\} + P\{n(t) > 0\} \\ &= P\{n(t) > 0\} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ ο βαθμός χρησιμοποίησης του εξυπηρετητή

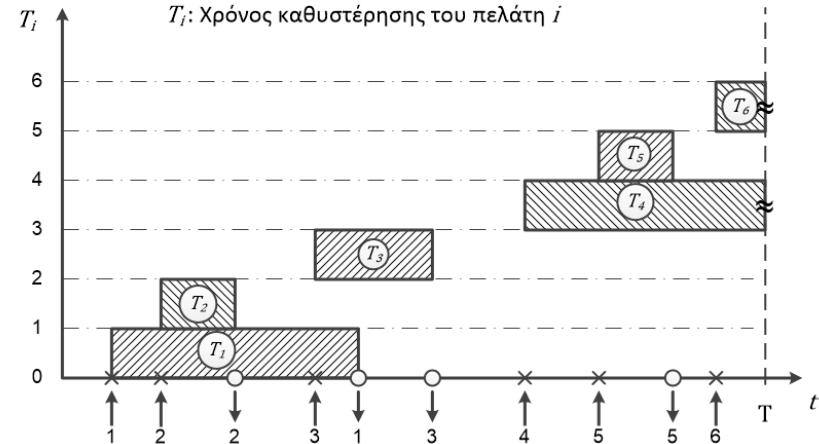
$$u = \frac{\gamma}{\mu} = P\{n(t) > 0\}$$



$A(t)$: Αριθμός αφίξεων πελατών στο $(0, t)$

$D(t)$: Αριθμός αναχωρήσεων πελατών στο $(0, t)$

T_i : Χρόνος καθυστέρησης του πελάτη i



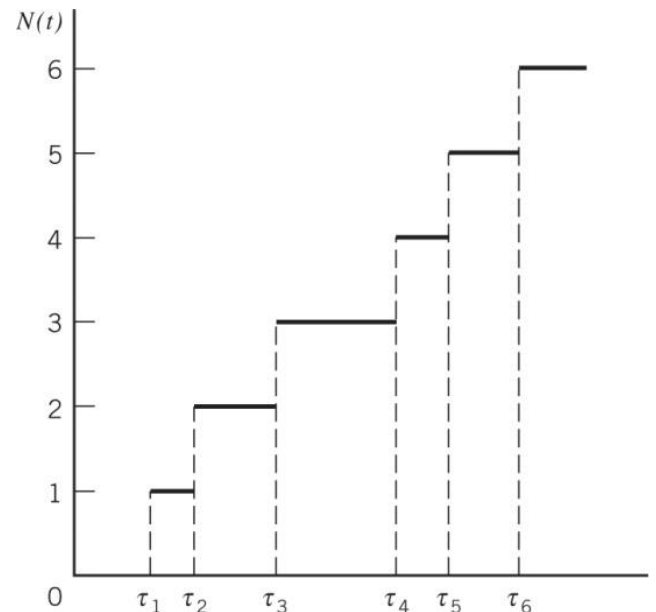
ΚΑΤΑΤΑΞΗ ΟΥΡΩΝ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

- **A/S/N/K**
 - A : Τύπος διαδικασίας εισόδου πελατών
 - S : Τύπος τυχαίας μεταβλητής χρόνου εξυπηρέτησης
 - N: Αριθμός εξυπηρετητών
 - K : Χωρητικότητα συστήματος (μέγιστος αριθμός πελατών στην αναμονή + εξυπηρέτηση)
- Παραδείγματα
 - **M/M/1**: Αφίξεις Poisson (*Markov, Memoryless*), ανεξάρτητοι χρόνοι εξυπηρέτησης εκθετικοί (*Markov*), 1 εξυπηρετητής, άπειρη χωρητικότητα συστήματος (μηδενικές απώλειες ή αστάθεια)
 - **M/D/1**: Αφίξεις Poisson (*Markov, Memoryless*), ανεξάρτητοι χρόνοι εξυπηρέτησης σταθεροί (*Deterministic*), 1 εξυπηρετητής, άπειρη χωρητικότητα συστήματος
 - **M/G/1/4**: Αφίξεις Poisson (*Markov, Memoryless*), ανεξάρτητοι χρόνοι εξυπηρέτησης γενικής κατανομής (*General*), 1 εξυπηρετητής, χωρητικότητα συστήματος 4 πελάτες
 - **M/M/4/8**: Αφίξεις Poisson (*Markov, Memoryless*), ανεξάρτητοι χρόνοι εξυπηρέτησης εκθετικοί (*Markov*), 4 εξυπηρετητές, χωρητικότητα συστήματος 8 πελάτες: Μοντέλο κέντρου κλήσεων (call center) με 4 χειριστές – τηλεφωνητές & μέχρι 4 κλήσεις στην αναμονή

Η ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΚΑΤΑΜΕΤΡΗΣΗΣ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ POISSON

Η τυχαία εμφάνιση παλμών περιγράφεται σαν μια **Στοχαστική Ανέλιξη Απαρίθμησης (Counting Process)** $N(t)$ που καταμετρά τυχαία γεγονότα (αφίξεις πελατών) στο διάστημα $(0, t)$.

Ο αριθμός εμφανίσεων στο διάστημα $(t, t + T)$ είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή $\nu = N(t + T) - N(t)$. Κάτω από συνθήκες απρόβλεπτης εξέλιξης της ανέλιξης (τα γεγονότα εμφανίζονται ανεξάρτητα από το παρελθόν και χωρίς να επηρεάζουν το μέλλον), η ν ακολουθεί την **κατανομή Poisson** με μέσο αριθμό εμφανίσεων ανάλογο του διαστήματος T : $E_T[\nu] = \lambda T$. Η σταθερά λ ορίζει τον μέσο ρυθμό (**rate**) εμφανίσεων (γεγονότα ανά μονάδα χρόνου)



Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON (1/3)

Διακριτή Τυχαία Μεταβλητή $\nu = N(t + T) - N(t)$ απαρίθμησης γεγονότων σε χρονικό διάστημα παρατήρησης T που εμφανίζονται **τυχαία** και **ανεξάρτητα** από παρελθούσες ή μελλοντικές εμφανίσεις γεγονότων στο δείγμα (υλοποίηση) της Στοχαστικής Ανέλιξης μετρητή $N(t)$ στο οποίο συνεισφέρουν (**ιδιότητα έλλειψης μνήμης** **Markov**)

Ο μέσος όρος εμφανίσεων γεγονότων στο διάστημα T είναι $E_T[\nu] = \lambda T$

Εφαρμογές σε ανεξάρτητες εμφανίσεις τυχαίων γεγονότων:

- Τυχαίες εκρήξεις που προκαλούν τον **ΘΟΡΥΒΟ ΒΟΛΗΣ** σε ηλεκτρονικές συσκευές επικοινωνιών
- Ανεξάρτητες τυχαίες **αφίξεις πελατών** σε **ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΟΥΡΩΝ ΑΝΑΜΟΝΗΣ** με απαιτήσεις εξυπηρέτησης όπως:
 - Διεκπεραίωση Τηλεφωνικών Κλήσεων
 - Διακίνηση Πακέτων Δεδομένων στο Internet
 - Κυκλοφορία Αυτοκίνητων σε Οδικά Συστήματα
 - Αγορές και Πληρωμές σε Καταστήματα
 - Επεξεργασία Δεδομένων σε Κοινές Υπολογιστικές Υποδομές

Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON (2/3)

Η Κατανομή Poisson σαν Όριο Διωνυμικής Κατανομής

Ανεξάρτητες εμφανίσεις $\{N(t) = k\}$ γεγονότων (σημείων) **Poisson** στο διάστημα $(0, t)$ με ρυθμό λ σημεία/sec ορίζουν Διακριτή Τυχαία Μεταβλητή (*Discrete Random Variable*) $\{v = k\}$ με Κατανομή Μάζας Πιθανότητας

$$P_t[v = k] \triangleq P[N(t) = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Απόδειξη



- Διαιρώ το διάστημα t σε n υποδιαστήματα, $t = n\Delta t$
- Πραγματοποιώ n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli, μια σε κάθε υποδιάστημα, με δύο εναλλακτικές: Εμφάνιση (**επιτυχία**) με πιθανότητα $p = \lambda\Delta t$, μη εμφάνιση (**αποτυχία**) με $1 - p$
- Η πιθανότητα k επιτυχιών σε n ανεξάρτητες δοκιμές δίνεται από την Διωνυμική Κατανομή:

$$P[N(t) = k] = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

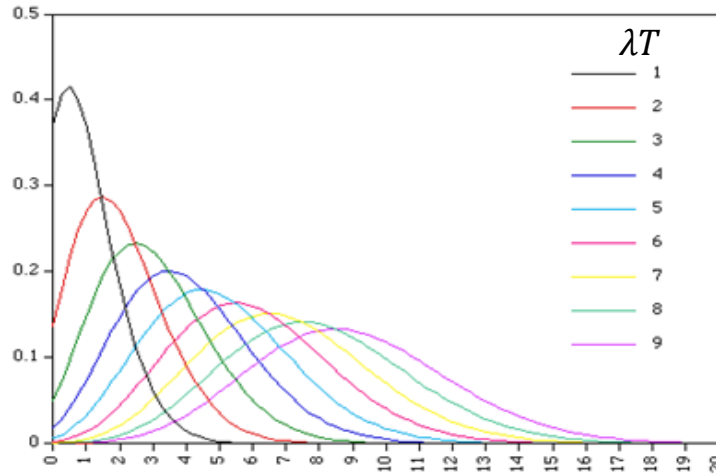
$$P[N(t) = k] = \binom{n}{k} (\lambda\Delta t)^k (1 - \lambda\Delta t)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k}$$

- Στο όριο $\Delta t \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $t = n\Delta t$ έχουμε $\frac{n!}{(n-k)!} \rightarrow n^k$, $\left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} \rightarrow e^{-\lambda t}$ και

$$P[N(t) = k] = \frac{n!}{k! (n-k)!} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} \rightarrow \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON (3/3)

Κατανομή Poisson για Διαφορετικές Τιμές του $\lambda T = E[N(T)]$
(μέσος αριθμός εμφανίσεων νενοτόνων σε διάστημα T)

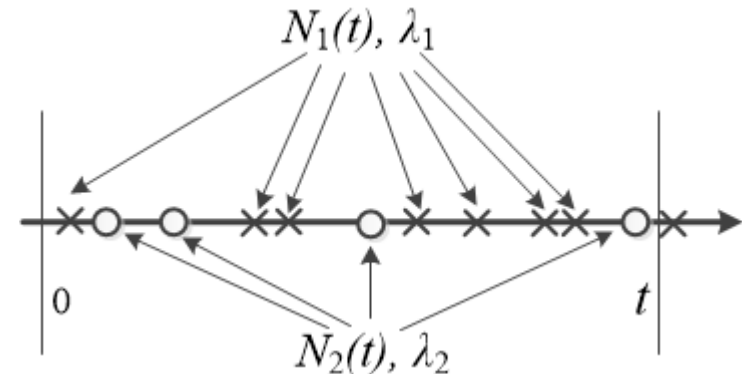


Οι συνεχείς καμπύλες στο σχήμα είναι οι περιβάλλουσες των Συναρτήσεων Μάζας Πιθανότητας (Ιστογράμματος) της Διακριτής Τυχαίας Μεταβλητής Poisson

$$P_T[v = k] \triangleq P[N(T) = k] = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T}$$

Ιδιότητες της Στοχαστικής Ανέλιξης Poisson

- $E[N(t)] = \sigma_{N(t)}^2 = \lambda t$
- Ο συνολικός αριθμός σημείων Στοχαστική Ανέλιξης Poisson ρυθμού λ σε μη υπερ-καλυπτόμενα χρονικά διαστήματα T_1, T_2 είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή Poisson με μέση τιμή $\lambda(T_1 + T_2)$
- **Υπέρθεση** δυο **ανεξαρτήτων** Ανελίσξεων Poisson $N_1(t), N_2(t)$ με ρυθμούς λ_1, λ_2 δίνει Ανέλιξη Poisson $N(t)$ με ρυθμό $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$
- **Διάσπαση** Ανέλιξης Poisson ρυθμού λ μέσω ανεξαρτήτων τυχαίων επαναλήψεων **Bernoulli** με πιθανότητες $p, q = 1 - p$ (π.χ. τυχαία δρομολόγηση χωρίς μνήμη) δημιουργεί ανεξάρτητες ανελίσξεις (διαδικασίες) Poisson με μέσους ρυθμούς $\lambda_1 = p\lambda, \lambda_2 = q\lambda$



3^ο Μάθημα

Επισκόπηση Γνώσεων Πιθανοτήτων (2/2)

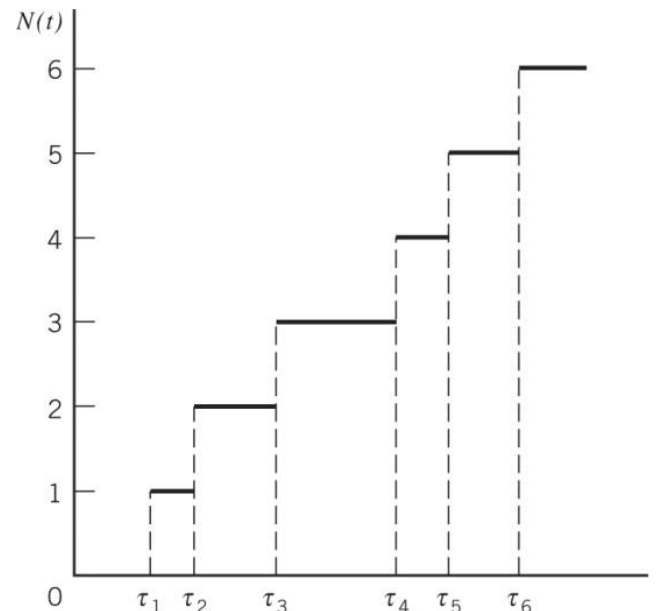
Διαδικασία Γεννήσεων – Θανάτων

Η Ουρά M/M/1

Η ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΚΑΤΑΜΕΤΡΗΣΗΣ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ POISSON (επανάληψη)

Η τυχαία εμφάνιση παλμών περιγράφεται σαν μια **Στοχαστική Ανέλιξη Απαρίθμησης** (*Counting Process*) $N(t)$ που καταμετρά τυχαία γεγονότα (αφίξεις πελατών) στο διάστημα $(0, t)$.

Ο αριθμός εμφανίσεων στο διάστημα $(t, t + T)$ είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή $\nu = N(t + T) - N(t)$. Κάτω από συνθήκες απρόβλεπτης εξέλιξης της ανέλιξης (τα γεγονότα εμφανίζονται ανεξάρτητα από το παρελθόν και χωρίς να επηρεάζουν το μέλλον), η ν ακολουθεί την **κατανομή Poisson** με μέσο αριθμό εμφανίσεων ανάλογο του διαστήματος T : $E_T[\nu] = \lambda T$. Η σταθερά λ ορίζει τον μέσο ρυθμό (*rate*) εμφανίσεων (γεγονότα ανά μονάδα χρόνου)



Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON (1/3)

(επανάληψη)

Διακριτή Τυχαία Μεταβλητή $\nu = N(t + T) - N(t)$ απαρίθμησης γεγονότων σε χρονικό διάστημα παρατήρησης T που εμφανίζονται **τυχαία** και **ανεξάρτητα** από παρελθούσες ή μελλοντικές εμφανίσεις γεγονότων στο δείγμα (υλοποίηση) της Στοχαστικής Ανέλιξης μετρητή $N(t)$ στο οποίο συνεισφέρουν (**ιδιότητα έλλειψης μνήμης** *Markov*)

Ο μέσος όρος εμφανίσεων γεγονότων στο διάστημα T είναι $E_T[\nu] = \lambda T$

Εφαρμογές σε ανεξάρτητες εμφανίσεις τυχαίων γεγονότων:

- Τυχαίες εκρήξεις που προκαλούν τον **ΘΟΡΥΒΟ ΒΟΛΗΣ** σε ηλεκτρονικές συσκευές επικοινωνιών
- Ανεξάρτητες τυχαίες **αφίξεις πελατών** σε **ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΟΥΡΩΝ ΑΝΑΜΟΝΗΣ** με απαιτήσεις εξυπηρέτησης όπως:
 - Διεκπεραίωση Τηλεφωνικών Κλήσεων
 - Διακίνηση Πακέτων Δεδομένων στο Internet
 - Κυκλοφορία Αυτοκινήτων σε Οδικά Συστήματα
 - Αγορές και Πληρωμές σε Καταστήματα
 - Επεξεργασία Δεδομένων σε Κοινές Υπολογιστικές Υποδομές

Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON (2/3)

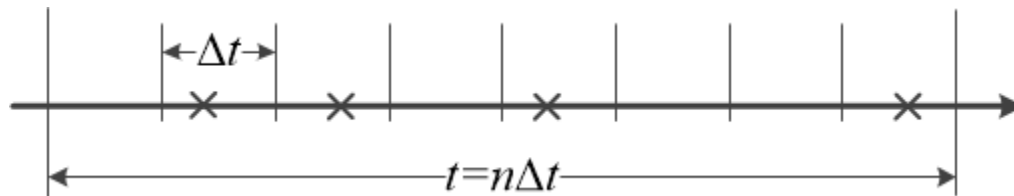
(επανάληψη)

Η Κατανομή Poisson σαν Όριο Διωνυμικής Κατανομής

Ανεξάρτητες εμφανίσεις $\{N(t) = k\}$ γεγονότων (σημείων) **Poisson** στο διάστημα $(0, t)$ με ρυθμό λ σημεία/sec ορίζουν Διακριτή Τυχαία Μεταβλητή (*Discrete Random Variable*) $\{v = k\}$ με Κατανομή Μάζας Πιθανότητας

$$P_t[v = k] \triangleq P[N(t) = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Απόδειξη



- Διαιρώ το διάστημα t σε n υποδιαστήματα, $t = n\Delta t$
- Πραγματοποιώ n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli, μια σε κάθε υποδιάστημα, με δύο εναλλακτικές: Εμφάνιση (**επιτυχία**) με πιθανότητα $p = \lambda\Delta t$, μη εμφάνιση (**αποτυχία**) με $1 - p$
- Η πιθανότητα k επιτυχιών σε n ανεξάρτητες δοκιμές δίνεται από την Διωνυμική Κατανομή:

$$P[N(t) = k] = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

$$P[N(t) = k] = \binom{n}{k} (\lambda\Delta t)^k (1 - \lambda\Delta t)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k}$$

- Στο όριο $\Delta t \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $t = n\Delta t$ έχουμε $\frac{n!}{(n-k)!} \rightarrow n^k$, $\left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} \rightarrow e^{-\lambda t}$ και

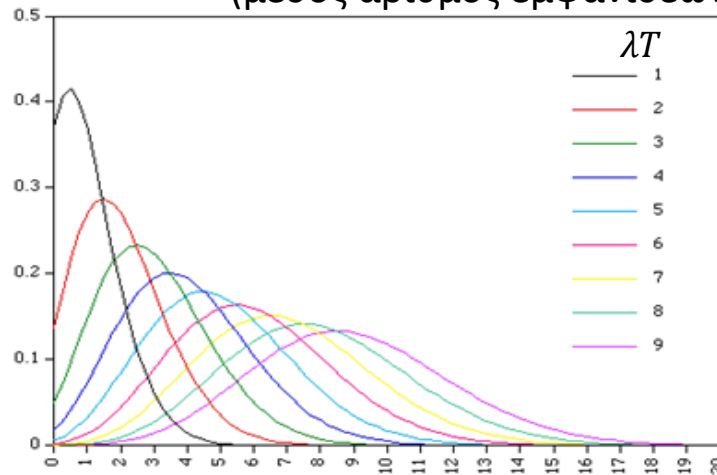
$$P[N(t) = k] = \frac{n!}{k! (n-k)!} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} \rightarrow \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON (3/3)

(επανάληψη)

Κατανομή Poisson για Διαφορετικές Τιμές του $\lambda T = E[N(T)]$

(μέσος αριθμός εμφανίσεων γεγονότων σε διάστημα T)

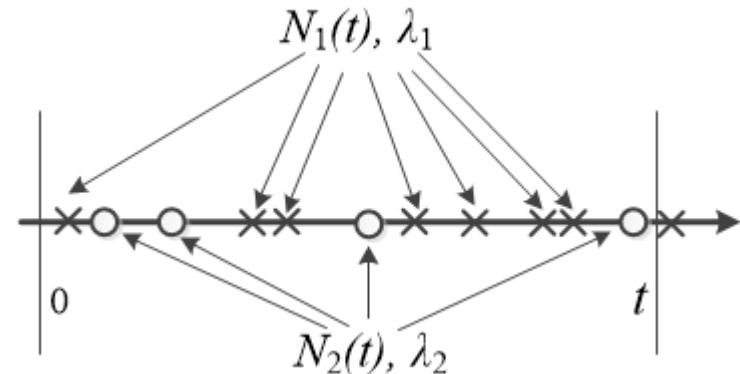


Οι συνεχείς καμπύλες στο σχήμα είναι οι περιβάλλουσες των Συναρτήσεων Μάζας Πιθανότητας (Ιστογράμματος) της Διακριτής Τυχαίας Μεταβλητής Poisson

$$P_T[v = k] \triangleq P[N(T) = k] = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T}$$

Ιδιότητες της Στοχαστικής Ανέλιξης Poisson

- $E[N(t)] = \sigma_{N(t)}^2 = \lambda t$
- Ο συνολικός αριθμός σημείων Στοχαστική Ανέλιξης Poisson ρυθμού λ σε μη υπερ-καλυπτόμενα χρονικά διαστήματα T_1, T_2 είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή Poisson με μέση τιμή $\lambda(T_1 + T_2)$
- **Υπέρθεση** δυο **ανεξαρτήτων** Ανελίξεων Poisson $N_1(t), N_2(t)$ με ρυθμούς λ_1, λ_2 δίνει Ανέλιξη Poisson $N(t)$ με ρυθμό $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$
- **Διάσπαση** Ανέλιξης Poisson ρυθμού λ μέσω ανεξαρτήτων τυχαίων επαναλήψεων **Bernoulli** με πιθανότητες $p, q = 1 - p$ (π.χ. τυχαία δρομολόγηση χωρίς μνήμη) δημιουργεί ανεξάρτητες ανελίξεις (διαδικασίες) Poisson με μέσους ρυθμούς $\lambda_1 = p\lambda, \lambda_2 = q\lambda$



Η ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ (1/2)

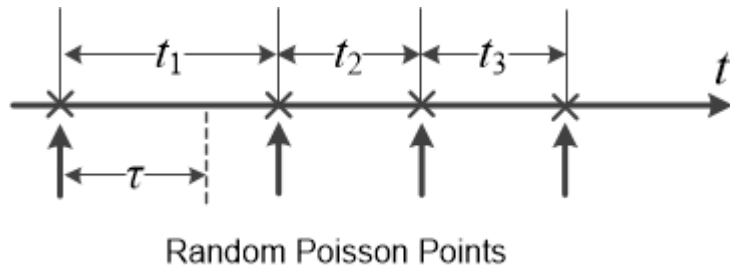
Ορισμοί, Συνάρτηση Αθροιστικής Κατανομής - Cumulative Distribution Function (CDF) & Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας - Probability Density Function (PDF)

Το χρονικό διάστημα τ μεταξύ διαδοχικών εμφανίσεων σημείων Poisson είναι Συνεχής Τυχαία Μεταβλητή (*Continuous Random Variable*) με **Εκθετική Κατανομή** (*Exponential Distribution*):

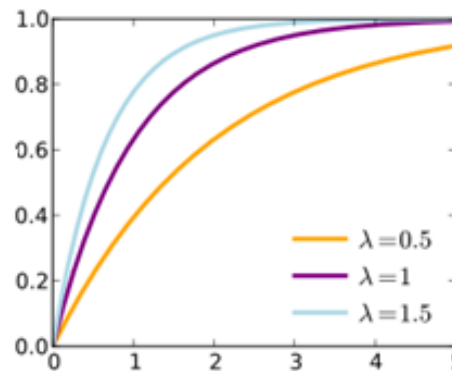
$$\text{CDF: } F_{\tau}(t) = P[\tau \leq t] = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \text{ και PDF: } f_{\tau}(t) = \frac{dF_{\tau}(t)}{dt} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Απόδειξη

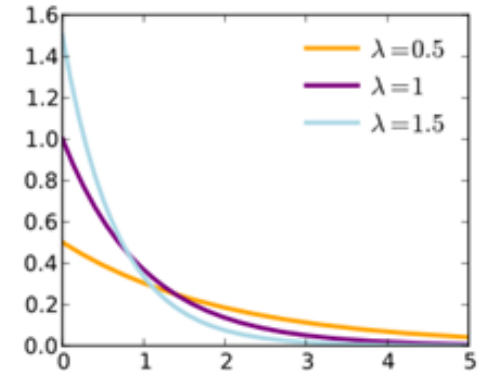
$$1 - F_{\tau}(t_1) = 1 - P[\tau \leq t_1] = P[\tau > t_1] = P_{t_1}[\nu = 0] = \frac{(\lambda t_1)^0}{0!} e^{-\lambda t_1} = e^{-\lambda t_1}$$



https://en.wikipedia.org/wiki/Exponential_distribution



CDF: $F_{\tau}(t) = P[\tau \leq t]$



PDF: $f(t) = \frac{dF_{\tau}(t)}{dt}$

Η ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ (2/2)

Ιδιότητες Εκθετικής Κατανομής

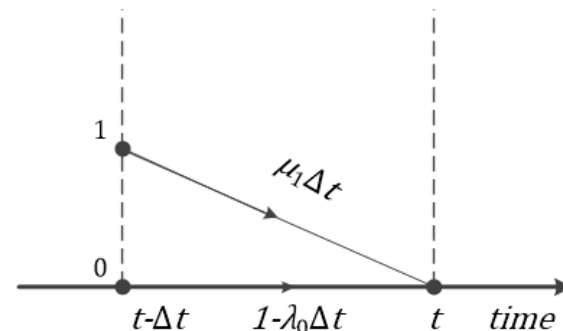
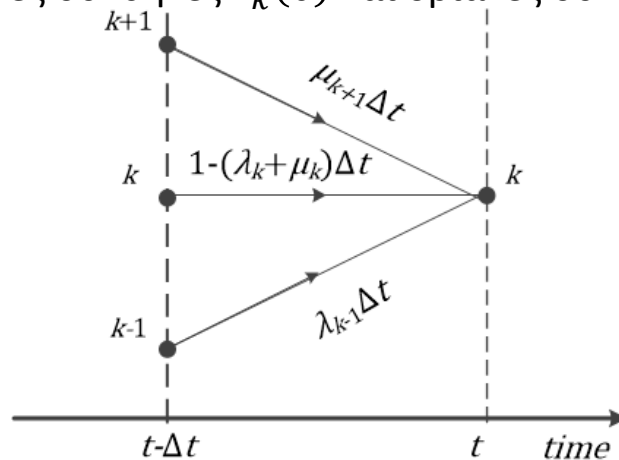
- $E[\tau] = \int_{t=0}^{\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt = 1/\lambda$
- $E[\tau^2] = \int_{t=0}^{\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt = 2/\lambda^2$, $\sigma_{\tau}^2 = E[\tau^2] - (E[\tau])^2 = 1/\lambda^2$
- Ιδιότητα έλλειψης μνήμης:
$$P[\tau > t + s | \tau > s] = \frac{P[\tau > t + s, \tau > s]}{P[\tau > s]} = \frac{P[\tau > t + s]}{P[\tau > s]} = e^{-\lambda t} = P[\tau > t]$$
$$= 1 - F_{\tau}(t)$$

Η εκθετική κατανομή είναι η **μόνη κατανομή συνεχούς μεταβλητής** με την ιδιότητα αυτή (**Memoryless, Markov Property**). Την ίδια ιδιότητα έχει η διακριτή γεωμετρική κατανομή της οποίας το όριο σε συνεχές πεδίο ορισμού είναι η εκθετική κατανομή

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ – ΘΑΝΑΤΩΝ (1/4)

Birth – Death Processes

- Παραδοχές:
 - Ανεξαρτησία γεννήσεων-θανάτων
 - Εξέλιξη της κατάστασης - πληθυσμού $n(t)$ βασισμένη μόνο στο παρόν (Ιδιότητα Markov)
- Σύστημα Διαφορικών εξισώσεων Διαφορών
 - Κατάσταση ισορροπίας (**steady state**)
 - Την χρονική στιγμή t το σύστημα καταλήγει σε πληθυσμό $n(t) = k$
 - Μπορεί να έχουν προηγηθεί οι ακόλουθες μεταβάσεις από την χρονική στιγμή $t - \Delta t, \Delta t \rightarrow 0$:
 - Μία άφιξη στο διάστημα Δt , με πιθανότητα $\lambda_{k-1}\Delta t$ αν $k > 0$
 - Μια αναχώρηση, με πιθανότητα $\mu_{k+1}\Delta t$ αν υπάρχει η $k + 1$ (σε περίπτωση περιορισμού μέγιστου πληθυσμού K μπορούμε να θεωρήσουμε $\mu_{k+1} = 0$)
 - Τίποτα από τα δύο, με πιθανότητα $1 - (\lambda_k + \mu_k)\Delta t$ αν $k > 0$ ή $1 - \lambda_0\Delta t$ αν $k = 0$
- Οι εξισώσεις μετάβασης (**Chapman - Kolmogorov**) προκύπτουν από τον τύπο συνολικής πιθανότητας:
 - $P_k(t) = \lambda_{k-1}\Delta t P_{k-1}(t - \Delta t) + \mu_{k+1}\Delta t P_{k+1}(t - \Delta t) + [1 - (\lambda_k + \mu_k)\Delta t]P_k(t - \Delta t)$
 - $P_0(t) = \mu_1\Delta t P_1(t - \Delta t) + (1 - \lambda_0\Delta t)P_0(t - \Delta t)$
 - με αρχικές συνθήκες $P_k(0)$ και οριακές συνθήκες $\sum_k P_k(t) = 1, \forall t$



ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ – ΘΑΝΑΤΩΝ (2/4)

Birth – Death Processes

Στο όριο, $\Delta t \approx dt \rightarrow 0$, $\frac{P_k(t) - P_k(t - \Delta t)}{\Delta t} \rightarrow \frac{dP_k(t)}{dt}$ και προκύπτει το γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων διαφορών:

$$\triangleright \frac{dP_k(t)}{dt} = \lambda_{k-1}P_{k-1}(t) + \mu_{k+1}P_{k+1}(t) - (\lambda_k + \mu_k)P_k(t), \quad k > 0$$

$$\triangleright \frac{dP_0(t)}{dt} = \mu_1P_1(t) - \lambda_0P_0(t)$$

$$\triangleright \text{με αρχικές συνθήκες } P_k(0) \text{ και οριακές συνθήκες } \sum_k P_k(t) = 1, \forall t$$

Όταν $t \rightarrow \infty$ και κάτω από ορισμένες συνθήκες το σύστημα συγκλίνει σε σταθερή κατάσταση. Το μεταβατικό φαινόμενο παύει να επηρεάζεται για καταστάσεις $n(t) = k$ απείρως επισκέψιμες - **positive recurrent**, ξεχνιέται η αρχική συνθήκη $P_k(0)$ και οι πιθανότητες $P_k(t)$ συγκλίνουν στις οριακές πιθανότητες $P_k > 0$:

$$\text{Για } t \rightarrow \infty, \frac{dP_k(t)}{dt} = 0, P_k(t) \rightarrow P_k > 0 : \text{Εργοδικές Οριακές Πιθανότητες}$$

Σημείωση: Ισχύει η **εργοδική** ιδιότητα και οι οριακές πιθανότητες μπορούν να προσεγγισθούν σαν $P_k = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{T_k}{T} \right\}$ όπου T_k είναι το σχετικό συνολικό χρονικό διάστημα T_k όταν $n(t) = k$ σε μεγάλο χρονικό ορίζοντα T **μιας** καταγραφής της εξέλιξης $n(t)$ σε **ισορροπία**.

Οι εργοδικές οριακές πιθανότητες προκύπτουν από τις γραμμικά ανεξάρτητες **Εξισώσεις Ισορροπίας**:

$$\triangleright (\lambda_k + \mu_k)P_k = \lambda_{k-1}P_{k-1} + \mu_{k+1}P_{k+1}, \quad k > 1$$

$$\triangleright \lambda_0P_0 = \mu_1P_1$$

$$\triangleright P_0 + P_1 + \dots + P_k + \dots = 1$$

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ – ΘΑΝΑΤΩΝ (3/4)

Birth – Death Processes

Εφαρμογή σε Απλή Ουρά M/M/1

- Αφίξεις Poisson με μέσο ρυθμό λ αφίξεις/sec: $\lambda_k = \lambda, k = 0, 1, 2, 3, \dots$
- Χρόνοι εξυπηρέτησης εκθετικοί με μέση τιμή $E(s) = \frac{1}{\mu}$ sec: $\mu_k = \mu, k = 1, 2, 3, \dots$
- $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ Erlang (συνθήκη για οριακή ισορροπία – εργοδικότητα)
- Η εξέλιξη των πιθανοτήτων $P[n(t) = k] = P_k(t)$ προκύπτει από το σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\text{➤ } \frac{dP_k(t)}{dt} = \lambda P_{k-1}(t) + \mu P_{k+1}(t) - (\lambda + \mu)P_k(t), \quad k > 0$$

$$\text{➤ } \frac{dP_0(t)}{dt} = \mu P_1(t) - \lambda P_0(t)$$

$$\text{➤ } \text{με αρχικές συνθήκες } P_k(0) \text{ και οριακές συνθήκες } \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1 \quad \forall t \geq 0$$

- Στο όριο $t \rightarrow \infty, \frac{dP_k(t)}{dt} = 0, P_k(t) \rightarrow P_k > 0$, τις **εργοδικές πιθανότητες** που προκύπτουν από τις εξισώσεις ισορροπίας:

$$\text{➤ } \lambda P_0 = \mu P_1 \text{ ή } P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 = \rho P_0$$

$$\text{➤ } (\lambda + \mu)P_1 = \lambda P_0 + \mu P_2 \text{ ή } P_2 = \rho^2 P_0 \text{ και γενικά } P_k = \rho^k P_0, \quad k > 0$$

$$\text{➤ } P_0 + P_1 + \dots + P_k + \dots = 1 = P_0(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots)$$

$$\text{Εφόσον } 0 < \rho < 1 \text{ η άπειρη δυναμοσειρά } (1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots) \rightarrow \frac{1}{1-\rho} \Rightarrow P_0\left(\frac{1}{1-\rho}\right) = 1 \text{ και}$$

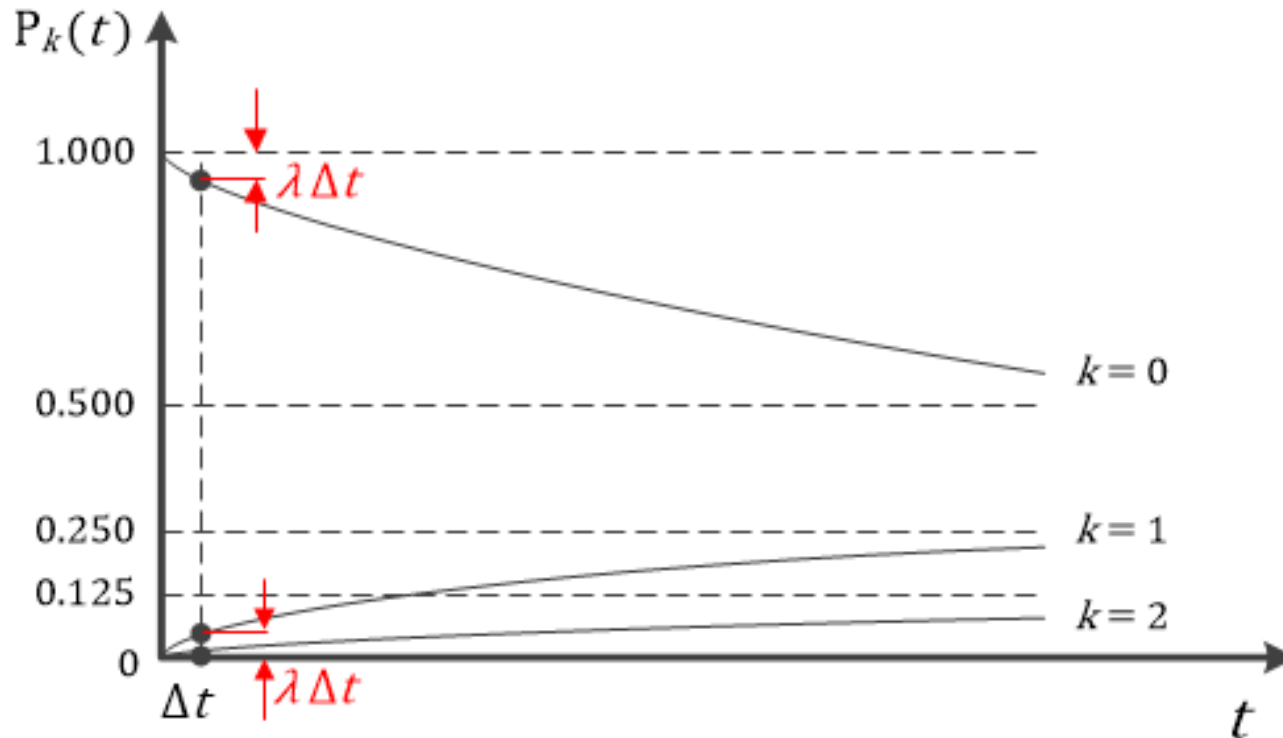
$$P_0 = (1 - \rho), \quad P_k = (1 - \rho)\rho^k, \quad k > 0$$

$$\text{Μέσο μήκος ουράς M/M/1 σε ισορροπία: } E[n(t)] \triangleq \sum_{k=1}^{\infty} k P_k = \frac{\rho}{1-\rho}$$

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ – ΘΑΝΑΤΩΝ (4/4)

Birth – Death Processes

Χρονική Εξέλιξη Πιθανοτήτων Κατάστασης Απλής Ουράς M/M/1



$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0.5 \text{ Erlangs}$$

Αρχικές Συνθήκες: $P_0(0) = 1$, $P_k(0) = 0$

Οριακές Εργοδικές Πιθανότητες:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_0(t) = P_0 = 1 - \rho = 0.500$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_1(t) = P_1 = (1 - \rho)\rho = 0.250$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_2(t) = P_2 = (1 - \rho)\rho^2 = 0.125$$

ΟΥΡΑ Μ/Μ/1

- Αφίξεις Poisson με μέσο ρυθμό λ αφίξεις/sec: $\lambda_k = \lambda = \gamma, \quad k = 0,1,2,3, \dots$
- Χρόνοι εξυπηρέτησης εκθετικοί με μέση τιμή $E(s) = \frac{1}{\mu}$ sec: $\mu_k = \mu, \quad k = 1,2,3, \dots$
- $\rho = u = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ Erlang (συνθήκη για οριακή ισορροπία – εργοδικότητα)
- Οι **εργοδικές πιθανότητες** προκύπτουν από τις εξισώσεις ισορροπίας:

$$\text{➤ } \lambda P_0 = \mu P_1 \text{ ή } P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 = \rho P_0$$

$$\text{➤ } (\lambda + \mu)P_1 = \lambda P_0 + \mu P_2 \text{ ή } P_2 = \rho^2 P_0 \text{ και } P_k = \rho^k P_0, \quad k > 0$$

$$\text{➤ } P_0 + P_1 + \dots + P_k + \dots = 1 = P_0(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots)$$

Με $0 < \rho < 1$ η άπειρη δυναμοσειρά συγκλίνει, $P_0 \left(\frac{1}{1-\rho}\right) = 1 \Rightarrow$

$$P_0 = (1 - \rho), \quad P_k = (1 - \rho)\rho^k, \quad k > 0 \text{ και } P\{n(t) > 0\} = 1 - P_0 = \rho$$

- **Μέση κατάσταση συστήματος Μ/Μ/1 σε ισορροπία:**

$$E[n(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} k P_k = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

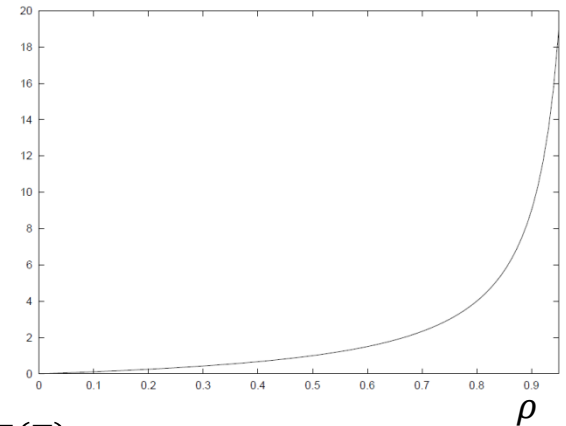
- **Μέσος χρόνος καθυστέρησης:** Τύπος Little

$$E(T) = \frac{E[n(t)]}{\gamma} = \frac{E[n(t)]}{\lambda} = \frac{1/\mu}{1 - \rho}$$

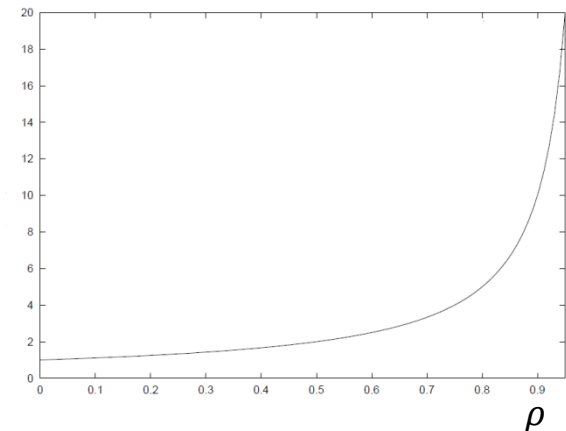
- **Μέσο μήκος ουράς & μέσος χρόνος αναμονής Μ/Μ/1:**

$$E[n_q(t)] = E[n(t)] - \rho, \quad E(W) = E(T) - 1/\mu$$

$E[n(t)]$



$E(T)$



4^ο Μάθημα

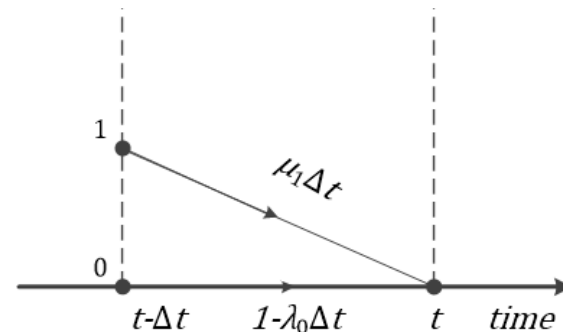
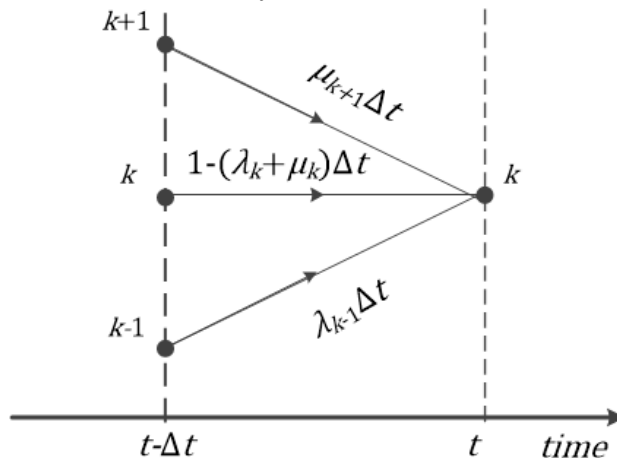
Η Ουρά M/M/1/N

Σφαιρικές & Τοπικές Εξισώσεις Ισορροπίας

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ – ΘΑΝΑΤΩΝ (1/4)

Birth – Death Processes (Επανάληψη)

- Παραδοχές:
 - Ανεξαρτησία γεννήσεων-θανάτων
 - Εξέλιξη της κατάστασης - πληθυσμού $n(t)$ βασισμένη μόνο στο παρόν (Ιδιότητα Markov)
- Σύστημα Διαφορικών εξισώσεων Διαφορών
 - Κατάσταση ισορροπίας (**steady state**)
 - Την χρονική στιγμή t το σύστημα καταλήγει σε πληθυσμό $n(t) = k$
 - Μπορεί να έχουν προηγηθεί οι ακόλουθες μεταβάσεις από την χρονική στιγμή $t - \Delta t, \Delta t \rightarrow 0$:
 - Μία άφιξη στο διάστημα Δt , με πιθανότητα $\lambda_{k-1} \Delta t$ αν $k > 0$
 - Μια αναχώρηση, με πιθανότητα $\mu_{k+1} \Delta t$ αν υπάρχει η $k + 1$ (σε περίπτωση περιορισμού μέγιστου πληθυσμού K μπορούμε να θεωρήσουμε $\mu_{k+1} = 0$)
 - Τίποτα από τα δύο, με πιθανότητα $1 - (\lambda_k + \mu_k) \Delta t$ αν $k > 0$ ή $1 - \lambda_0 \Delta t$ αν $k = 0$
- Οι εξισώσεις μετάβασης (**Chapman - Kolmogorov**) προκύπτουν από τον τύπο συνολικής πιθανότητας:
 - $P_k(t) = \lambda_{k-1} \Delta t P_{k-1}(t - \Delta t) + \mu_{k+1} \Delta t P_{k+1}(t - \Delta t) + [1 - (\lambda_k + \mu_k) \Delta t] P_k(t - \Delta t)$
 - $P_0(t) = \mu_1 \Delta t P_1(t - \Delta t) + (1 - \lambda_0 \Delta t) P_0(t - \Delta t)$
 - με αρχικές συνθήκες $P_k(0)$ και οριακές συνθήκες $\sum_k P_k(t) = 1, \forall t$



ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ – ΘΑΝΑΤΩΝ (2/4)

Birth – Death Processes (Επανάληψη)

Στο όριο, $\Delta t \approx dt \rightarrow 0$, $\frac{P_k(t) - P_k(t - \Delta t)}{\Delta t} \rightarrow \frac{dP_k(t)}{dt}$ και προκύπτει το γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων διαφορών:

$$\triangleright \frac{dP_k(t)}{dt} = \lambda_{k-1}P_{k-1}(t) + \mu_{k+1}P_{k+1}(t) - (\lambda_k + \mu_k)P_k(t), \quad k > 0$$

$$\triangleright \frac{dP_0(t)}{dt} = \mu_1P_1(t) - \lambda_0P_0(t)$$

$$\triangleright \text{με αρχικές συνθήκες } P_k(0) \text{ και οριακές συνθήκες } \sum_k P_k(t) = 1, \forall t$$

Όταν $t \rightarrow \infty$ και κάτω από ορισμένες συνθήκες το σύστημα συγκλίνει σε σταθερή κατάσταση. Το μεταβατικό φαινόμενο παύει να υπάρχει για καταστάσεις $n(t) = k$ απείρως επισκέψιμες - **positive recurrent**, ξεχνιέται η αρχική συνθήκη $P_k(0)$ και οι πιθανότητες $P_k(t)$ συγκλίνουν στις οριακές πιθανότητες $P_k > 0$:

$$\text{Για } t \rightarrow \infty, \frac{dP_k(t)}{dt} = 0, P_k(t) \rightarrow P_k > 0 : \text{Εργοδικές Οριακές Πιθανότητες}$$

Σημείωση: Ισχύει η **εργοδική** ιδιότητα και οι οριακές πιθανότητες μπορούν να προσεγγισθούν σαν $P_k = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{T_k}{T} \right\}$ όπου T_k είναι το σχετικό συνολικό χρονικό διάστημα T_k όταν $n(t) = k$ σε μεγάλο χρονικό ορίζοντα T **μιας** καταγραφής της εξέλιξης $n(t)$ σε **ισορροπία**.

Οι εργοδικές οριακές πιθανότητες προκύπτουν από τις γραμμικά ανεξάρτητες **Εξισώσεις Ισορροπίας**:

$$\triangleright (\lambda_k + \mu_k)P_k = \lambda_{k-1}P_{k-1} + \mu_{k+1}P_{k+1}, \quad k > 1$$

$$\triangleright \lambda_0P_0 = \mu_1P_1$$

$$\triangleright P_0 + P_1 + \dots + P_k + \dots = 1$$

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ – ΘΑΝΑΤΩΝ (3/4)

Birth – Death Processes (Επανάληψη)

Εφαρμογή σε Απλή Ουρά M/M/1

- Αφίξεις Poisson με μέσο ρυθμό λ αφίξεις/sec: $\lambda_k = \lambda, k = 0, 1, 2, 3, \dots$
- Χρόνοι εξυπηρέτησης εκθετικοί με μέση τιμή $E(s) = \frac{1}{\mu}$ sec: $\mu_k = \mu, k = 1, 2, 3, \dots$
- $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ Erlang (συνθήκη για οριακή ισορροπία – εργοδικότητα)
- Η εξέλιξη των πιθανοτήτων $P[n(t) = k] = P_k(t)$ προκύπτει από το σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\text{➤ } \frac{dP_k(t)}{dt} = \lambda P_{k-1}(t) + \mu P_{k+1}(t) - (\lambda + \mu)P_k(t), \quad k > 0$$

$$\text{➤ } \frac{dP_0(t)}{dt} = \mu P_1(t) - \lambda P_0(t)$$

$$\text{➤ } \text{με αρχικές συνθήκες } P_k(0) \text{ και οριακές συνθήκες } \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1 \quad \forall t \geq 0$$

- Στο όριο $t \rightarrow \infty, \frac{dP_k(t)}{dt} = 0, P_k(t) \rightarrow P_k > 0$, τις **εργοδικές πιθανότητες** που προκύπτουν από τις εξισώσεις ισορροπίας:

$$\text{➤ } \lambda P_0 = \mu P_1 \text{ ή } P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 = \rho P_0$$

$$\text{➤ } (\lambda + \mu)P_1 = \lambda P_0 + \mu P_2 \text{ ή } P_2 = \rho^2 P_0 \text{ και γενικά } P_k = \rho^k P_0, \quad k > 0$$

$$\text{➤ } P_0 + P_1 + \dots + P_k + \dots = 1 = P_0(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots)$$

$$\text{Εφόσον } 0 < \rho < 1 \text{ η άπειρη δυναμοσειρά } (1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots) \rightarrow \frac{1}{1-\rho} \Rightarrow P_0\left(\frac{1}{1-\rho}\right) = 1 \text{ και}$$

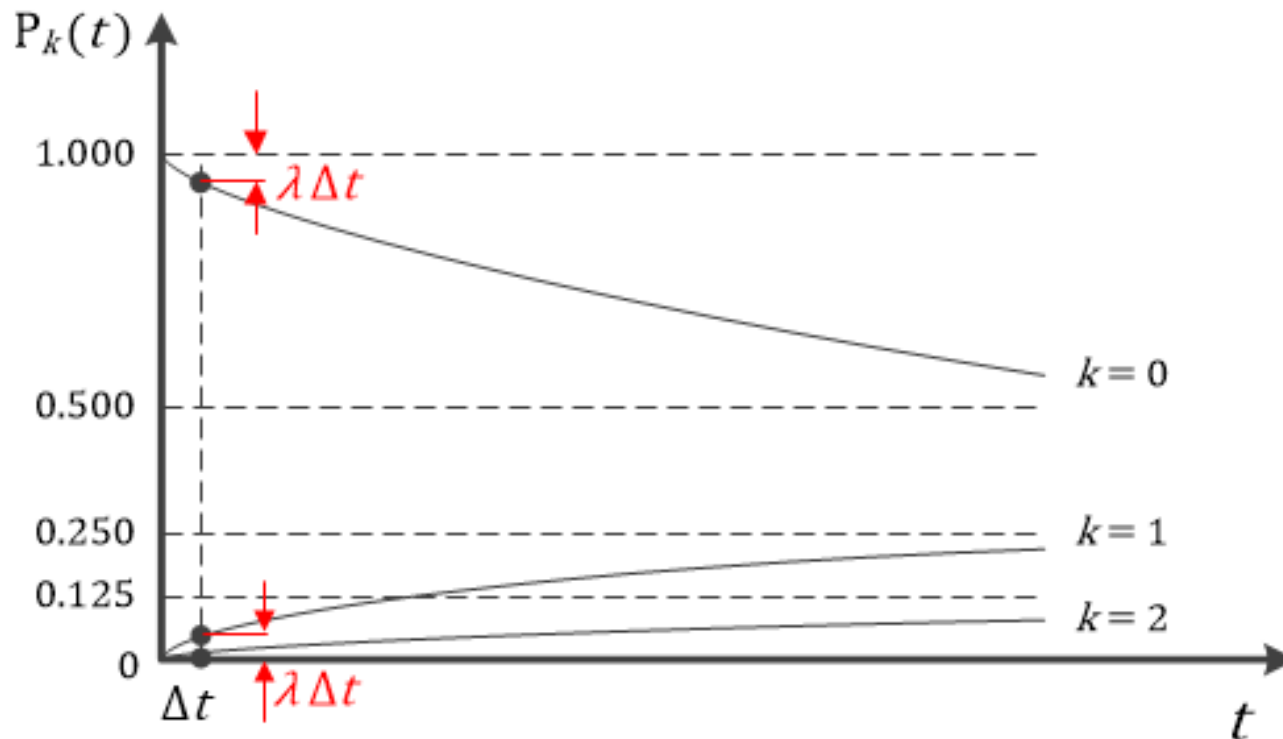
$$P_0 = (1 - \rho), \quad P_k = (1 - \rho)\rho^k, \quad k > 0$$

$$\text{Μέσο μήκος ουράς M/M/1 σε ισορροπία: } E[n(t)] \triangleq \sum_{k=1}^{\infty} k P_k = \frac{\rho}{1-\rho}$$

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ – ΘΑΝΑΤΩΝ (4/4)

Birth – Death Processes (Επανάληψη)

Χρονική Εξέλιξη Πιθανοτήτων Κατάστασης Απλής Ουράς Μ/Μ/1



$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0.5 \text{ Erlangs}$$

Αρχικές Συνθήκες: $P_0(0) = 1$, $P_k(0) = 0$

Οριακές Εργοδικές Πιθανότητες:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_0(t) = P_0 = 1 - \rho = 0.500$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_1(t) = P_1 = (1 - \rho)\rho = 0.250$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_2(t) = P_2 = (1 - \rho)\rho^2 = 0.125$$

ΟΥΡΑ Μ/Μ/1 (Επανάληψη)

- Αφίξεις Poisson με μέσο ρυθμό λ αφίξεις/sec: $\lambda_k = \lambda = \gamma, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$
- Χρόνοι εξυπηρέτησης εκθετικοί με μέση τιμή $E(s) = \frac{1}{\mu}$ sec: $\mu_k = \mu, \quad k = 1, 2, 3, \dots$
- $\rho = u = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ Erlang (συνθήκη για οριακή ισορροπία – εργοδικότητα)
- Οι **εργοδικές πιθανότητες** προκύπτουν από τις εξισώσεις ισορροπίας:

$$\text{➤ } \lambda P_0 = \mu P_1 \text{ ή } P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 = \rho P_0$$

$$\text{➤ } (\lambda + \mu)P_1 = \lambda P_0 + \mu P_2 \text{ ή } P_2 = \rho^2 P_0 \text{ και } P_k = \rho^k P_0, \quad k > 0$$

$$\text{➤ } P_0 + P_1 + \dots + P_k + \dots = 1 = P_0(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots)$$

Με $0 < \rho < 1$ η άπειρη δυναμοσειρά συγκλίνει, $P_0 \left(\frac{1}{1-\rho}\right) = 1 \Rightarrow$

$$P_0 = (1 - \rho), \quad P_k = (1 - \rho)\rho^k, \quad k > 0 \text{ και } P\{n(t) > 0\} = 1 - P_0 = \rho$$

- Μέση κατάσταση συστήματος Μ/Μ/1 σε ισορροπία:**

$$E[n(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} k P_k = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

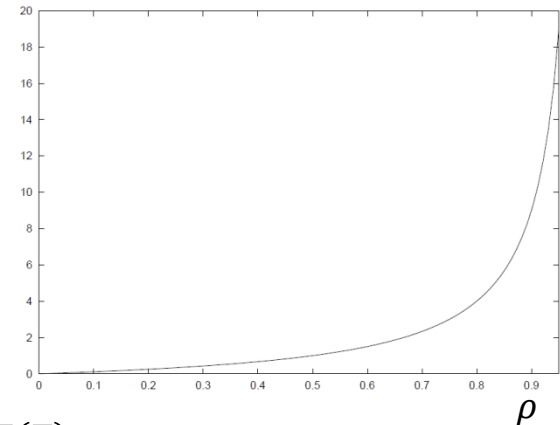
- Μέσος χρόνος καθυστέρησης:** Τύπος Little

$$E(T) = \frac{E[n(t)]}{\gamma} = \frac{E[n(t)]}{\lambda} = \frac{1/\mu}{1 - \rho}$$

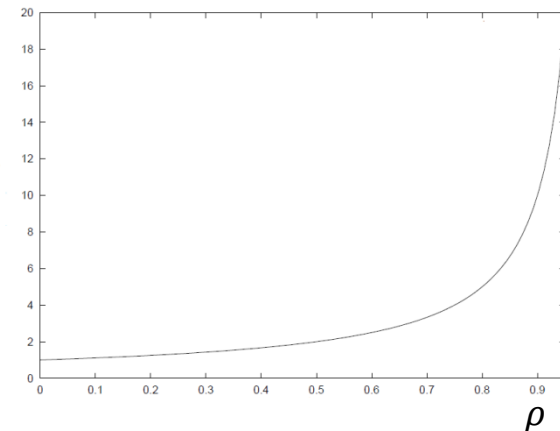
- Μέσο μήκος ουράς & μέσος χρόνος αναμονής Μ/Μ/1:**

$$E[n_q(t)] = E[n(t)] - \rho, \quad E(W) = E(T) - 1/\mu$$

$E[n(t)]$

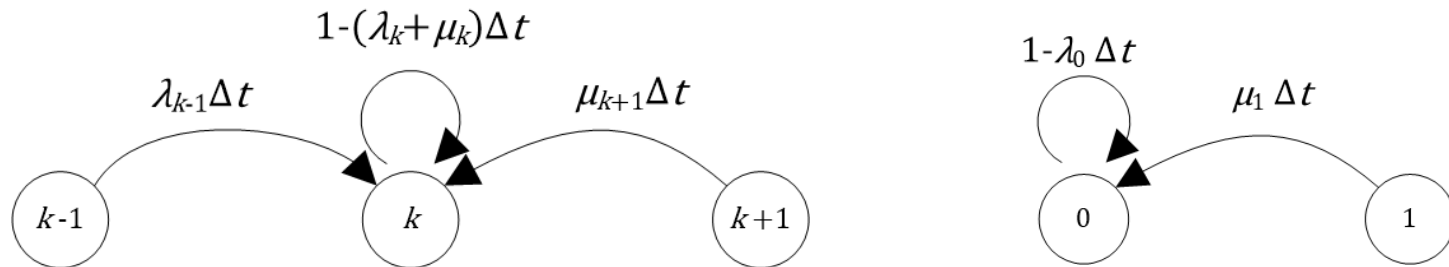


$E(T)$



ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ (1/3)

- Birth-Death Process: Διάγραμμα **Πιθανοτήτων Μεταβάσεων** σε χρόνο $\Delta t \rightarrow 0$ προς $n(t) = k$

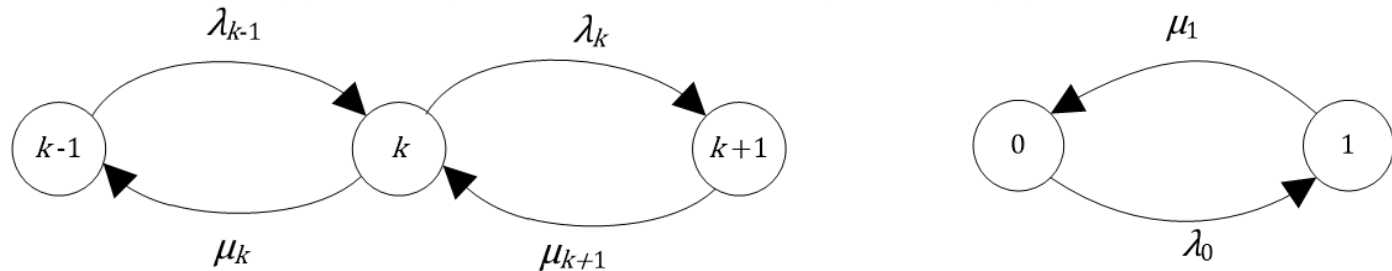


Εξισώσεις Μετάβασης (**Chapman - Kolmogorov**):

$$P_k(t) = \lambda_{k-1}\Delta t P_{k-1}(t - \Delta t) + \mu_{k+1}\Delta t P_{k+1}(t - \Delta t) + [1 - (\lambda_k + \mu_k)\Delta t]P_k(t - \Delta t), \quad k \geq 1$$

$$P_0(t) = \mu_1\Delta t P_1(t - \Delta t) + (1 - \lambda_0\Delta t)P_0(t - \Delta t)$$

- Birth-Death Process: Διάγραμμα **Ρυθμών Μεταβάσεων** μεταξύ **Εργοδικών** Καταστάσεων



Εξισώσεις Ισορροπίας:

$$(\lambda_k + \mu_k)P_k = \lambda_{k-1}P_{k-1} + \mu_{k+1}P_{k+1} \text{ για } k \geq 1 \text{ και } \lambda_0P_0 = \mu_1P_1$$

Σχετικές Πιθανότητες Μεταβάσεων $k \rightarrow (k + 1), k \rightarrow (k - 1)$:

$$P[k \rightarrow (k + 1)/\text{μετάβαση}] = \lambda_k/(\lambda_k + \mu_k), \quad P[k \rightarrow (k - 1)/\text{μετάβαση}] = \mu_k/(\lambda_k + \mu_k)$$

Dwell Time - Χρόνος Παραμονής στην $n(t) = k$ μέχρι την επόμενη μετάβαση

Εκθετική τυχαία μεταβλητή d_k με μέσο $1/(\lambda_k + \mu_k)$: Η μικρότερη δύο ανεξάρτητων εκθετικών τυχαίων μεταβλητών μέχρι (1) την επόμενη άφιξη με μέσο $1/\lambda_k$ ή (2) την ολοκλήρωση εξυπηρέτησης με μέσο $1/\mu_k$

$$d_k = \min(x, y), F_{d_k}(\tau) = P\{d_k \leq \tau\} = 1 - P\{d_k > \tau\} = 1 - e^{-(\lambda_k + \mu_k)\tau} \text{ διότι}$$

$$P\{d_k > \tau\} = P\{x > \tau, y > \tau\} = P\{x > \tau\}P\{y > \tau\} = e^{-\lambda_k\tau}e^{-\mu_k\tau} = e^{-(\lambda_k + \mu_k)\tau}$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ (2/3)

- Απείρως επισκέψιμες καταστάσεις $s = n(t)$ **positive recurrent states**: Με μη μηδενικές εργοδικές πιθανότητες $P\{n(t) = k\} = P_k(t) \rightarrow P_k > 0, k = 0, 1, 2, \dots$
- Σε μεγάλο χρονικό διάστημα παρατήρησης T ισορροπούν οι αριθμοί μεταβάσεων από και προς την κατάσταση s :

$$\#\{\text{ΜΕΤΑΒΑΣΕΩΝ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ } s\} = \#\{\text{ΕΚΤΟΣ ΤΗΣ } s\}$$

Σφαιρική Ισορροπία, Global Balance Equations

- Σε μεγάλο χρονικό διάστημα παρατήρησης T ισορροπούν οι αριθμοί μεταβάσεων μεταξύ δύο (όχι αναγκαστικά γειτονικών) καταστάσεων s_1 και s_2 :

$$\#\{\text{ΜΕΤΑΒΑΣΕΩΝ } s_1 \rightarrow s_2\} = \#\{\text{ΜΕΤΑΒΑΣΕΩΝ } s_2 \rightarrow s_1\}$$

Τοπική Ισορροπία, Local Balance Equations

- Λόγω **εργοδικότητας** σε μεγάλο χρονικό διάστημα παρατήρησης T , με T_1 και T_2 τους συνολικούς χρόνους παραμονής στις s_1, s_2 :

$$(1) \quad \#\{\text{ΜΕΤΑΒΑΣΕΩΝ } s_1 \rightarrow s_2\} = T_1 \times r_{1,2}$$

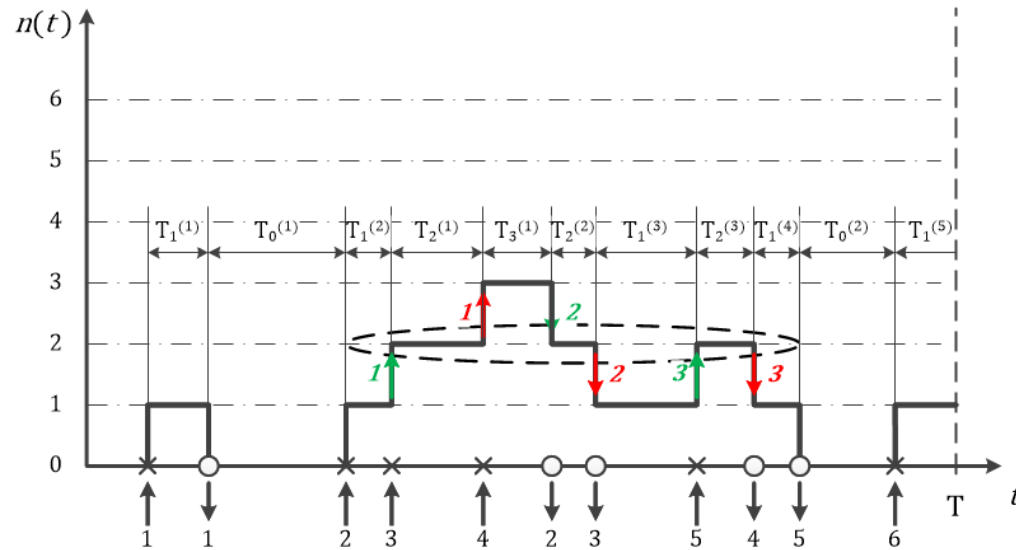
$$(2) \quad \#\{\text{ΜΕΤΑΒΑΣΕΩΝ } s_2 \rightarrow s_1\} = T_2 \times r_{2,1}$$

Όπου $r_{1,2}$ και $r_{2,1}$ οι μέσοι ρυθμοί μετάβασης από $s_1 \rightarrow s_2$ και $s_2 \rightarrow s_1$

- Λόγω **ισορροπίας**: (1) = (2) και $r_{1,2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_1}{T} = r_{2,1} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_2}{T}$ ή

$$r_{1,2} P_1 = r_{2,1} P_2 \quad \text{Local Balance Equations}$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ (3/3)



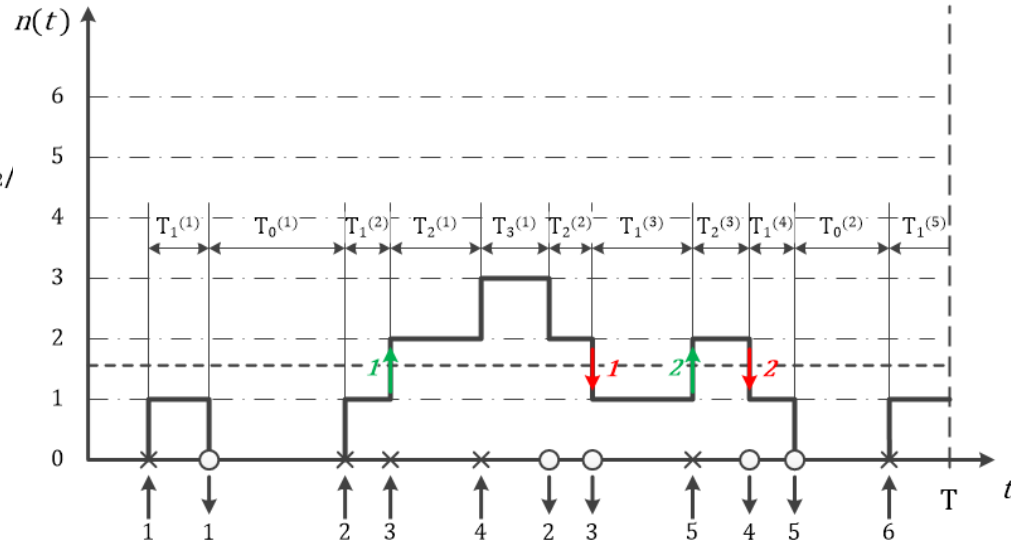
Global Balance Equation

$$T_1 = T_1(1) + T_1(2) + T_1(3) + T_1(4) + T_1(5)$$

$$T_2 = T_2(1) + T_2(2) + T_2(3), T_3 = T_3(1)$$

(State 2: **Transitions In** = **Transitions Out**)

$$\lambda T_1 + \mu T_3 \sim \lambda T_2 + \mu T_2 \Rightarrow (\lambda T_1 + \mu T_3)/T \sim (\lambda + \mu) (T_2/T) \\ \Rightarrow \lambda P_1 + \mu P_3 = (\lambda + \mu) P_2$$



Local Balance Equation

$$T_1 = T_1(1) + T_1(2) + T_1(3) + T_1(4) + T_1(5)$$

$$T_2 = T_2(1) + T_2(2) + T_2(3)$$

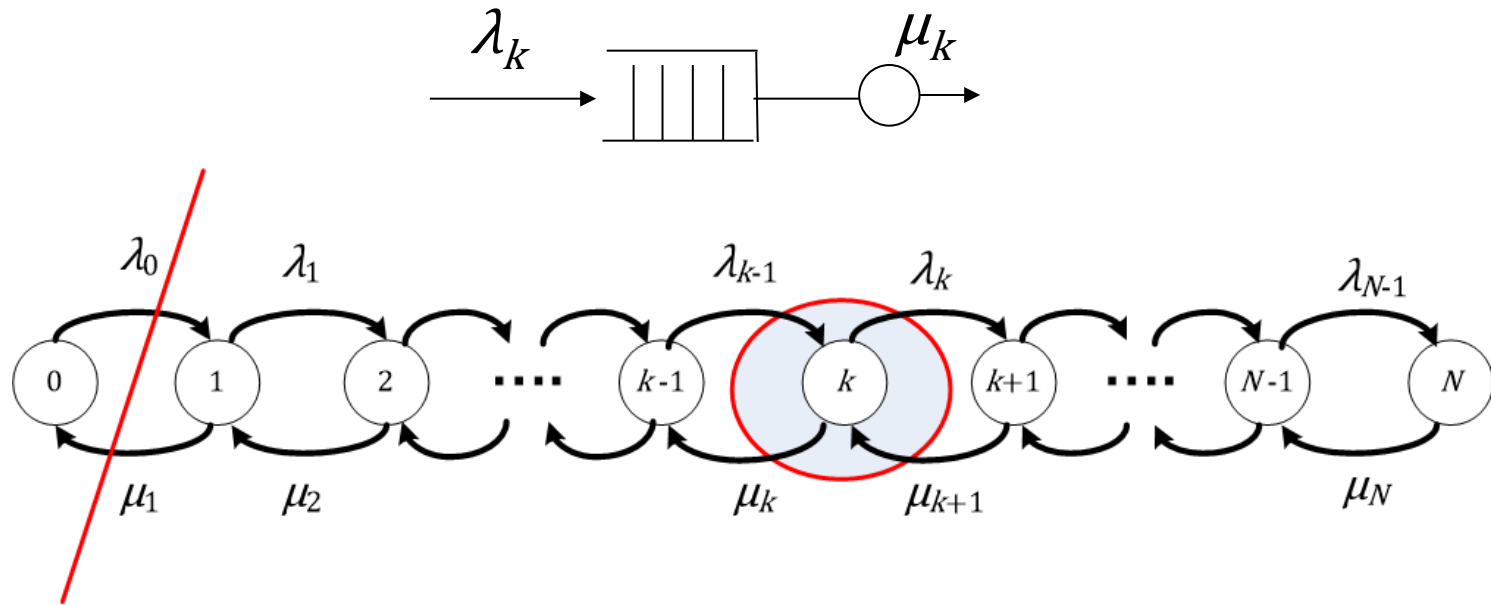
(**Transitions 1->2** = **Transitions 2->1**)

$$\lambda T_1 \sim \mu T_2 \Rightarrow \lambda (T_1/T) \sim \mu (T_2/T) \Rightarrow \lambda P_1 = \mu P_2$$

Σχηματική Απεικόνιση
Εξισώσεις Ισορροπίας στην Εργοδική Κατάσταση
Χρόνος Παρατήρησης Δείγματος $n(t)$: T

ΟΥΡΑ Μ/Μ/1/Ν (1/2)

- Συστήματα Μ/Μ/1/Ν με ρυθμούς άφιξης και ρυθμούς εξυπηρέτησης εξαρτώμενους από τον αριθμό των πελατών στο σύστημα (από την παρούσα κατάσταση του συστήματος)
(*State Dependent Μ/Μ/1/Ν Queues*)



Local Balance Equation

$$\begin{aligned} \lambda_0 P_0 &= \mu_1 P_1 \\ \lambda_{k-1} P_{k-1} &= \mu_k P_k \quad k = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

Global Balance Equation

$$\begin{aligned} \lambda_0 P_0 &= \mu_1 P_1 \\ (\lambda_k + \mu_k) P_k &= \lambda_{k-1} P_{k-1} + \mu_{k+1} P_{k+1} \quad k = 1, \dots, N \end{aligned}$$

Κανονικοποίηση Εργοδικών Πιθανοτήτων

$$P_0 + \dots + P_N = 1$$

ΟΥΡΑ Μ/Μ/1/Ν (2/2)

- Σταθεροί μέσοι ρυθμοί αφίξεων (γεννήσεων)

$$\lambda_k = \lambda, \text{ Poisson}, k = 1, 2, \dots, N$$

- Σταθεροί μέσοι ρυθμοί εξυπηρέτησης (θανάτων)

$$\mu_k = \mu, k = 1, 2, \dots, N$$

$$\text{Εκθετικοί ανεξάρτητοι χρόνοι εξυπηρέτησης } s, E(s) = 1/\mu$$

- Εργοδικές πιθανότητες καταστάσεων

$$P_k = \rho^k P_0, k = 0, 1, 2, \dots, N$$

$$P_0 + P_1 + \dots + P_{N-1} + P_N = 1$$

$$\rho = \lambda/\mu \text{ Erlangs (η Μ/Μ/1/Ν είναι πάντα ευσταθής γιατί υπερβολικό φορτίο δεν προωθείται)}$$

- Αντικαθιστώντας με τον τύπο πεπερασμένου αθροίσματος γεωμετρικής προόδου:

$$P_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}}, \quad \rho \neq 1$$

$$P_0 = \frac{1}{N + 1}, \quad \rho = 1$$

- Χρησιμοποίηση Εξυπηρετητή (Server Utilization) $U = 1 - P_0$
- Ρυθμαπόδοση (throughput) $\gamma = \lambda(1 - P_N) = \mu(1 - P_0) = \mu U$
- Πιθανότητα απώλειας $P_{\text{blocking}} = P_N$

- Στάσιμος Εργοδικός μέσος όρος πληθυσμού – κατάστασης

$$E[n(t)] \rightarrow E(k) = \sum_{k=1}^N k P_k = \rho \frac{1 - (N + 1)\rho^N + N\rho^{N+1}}{(1 - \rho)(1 - \rho^{N+1})}$$

- Νόμος του Little: $E(T) = E(k)/\gamma = E(k)/[\lambda(1 - P_N)]$

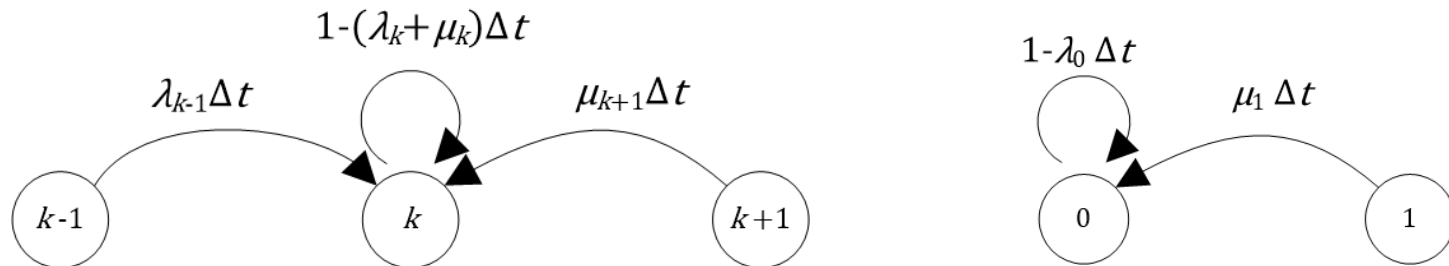
5^ο Μάθημα

Διαδικασίες Birth-Death, Ουρές Markov:

1. Διαγράμματα Μεταβάσεων Εργοδικών Καταστάσεων
2. Εξισώσεις Ισορροπίας
3. Προσομοιώσεις

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ (1/3) επανάληψη

- Birth-Death Process: Διάγραμμα **Πιθανοτήτων Μεταβάσεων** σε χρόνο $\Delta t \rightarrow 0$ προς $n(t) = k$

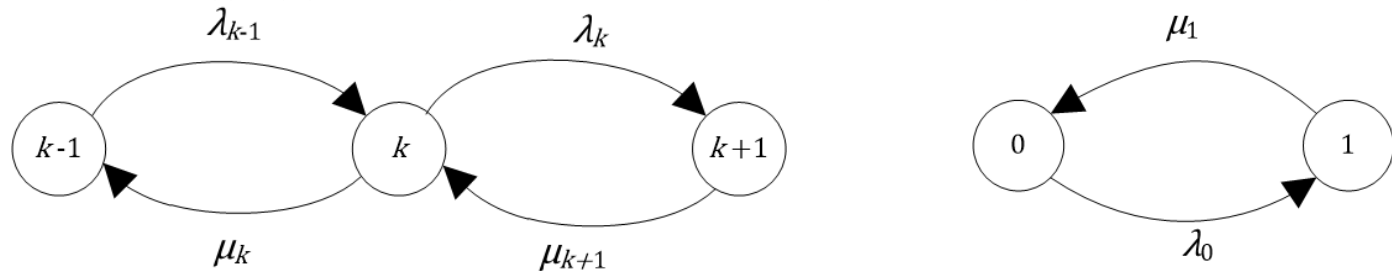


Εξισώσεις Μετάβασης (**Chapman - Kolmogorov**):

$$P_k(t) = \lambda_{k-1}\Delta t P_{k-1}(t - \Delta t) + \mu_{k+1}\Delta t P_{k+1}(t - \Delta t) + [1 - (\lambda_k + \mu_k)\Delta t]P_k(t - \Delta t), \quad k \geq 1$$

$$P_0(t) = \mu_1\Delta t P_1(t - \Delta t) + (1 - \lambda_0\Delta t)P_0(t - \Delta t)$$

- Birth-Death Process: Διάγραμμα **Ρυθμών Μεταβάσεων** μεταξύ **Εργοδικών** Καταστάσεων



Εξισώσεις Ισορροπίας:

$$(\lambda_k + \mu_k)P_k = \lambda_{k-1}P_{k-1} + \mu_{k+1}P_{k+1} \text{ για } k \geq 1 \text{ και } \lambda_0P_0 = \mu_1P_1$$

Σχετικές Πιθανότητες Μεταβάσεων $k \rightarrow (k+1), k \rightarrow (k-1)$:

$$P[k \rightarrow (k+1)/\text{μετάβαση}] = \lambda_k/(\lambda_k + \mu_k), \quad P[k \rightarrow (k-1)/\text{μετάβαση}] = \mu_k/(\lambda_k + \mu_k)$$

Dwell Time - Χρόνος Παραμονής στην $n(t) = k$ μέχρι την επόμενη μετάβαση

Εκθετική τυχαία μεταβλητή d_k με μέσο $1/(\lambda_k + \mu_k)$: Η μικρότερη δύο ανεξάρτητων εκθετικών τυχαίων μεταβλητών μέχρι (1) την επόμενη άφιξη με μέσο $1/\lambda_k$ ή (2) την ολοκλήρωση εξυπηρέτησης με μέσο $1/\mu_k$

$$d_k = \min(x, y), F_{d_k}(\tau) = P\{d_k \leq \tau\} = 1 - P\{d_k > \tau\} = 1 - e^{-(\lambda_k + \mu_k)\tau} \text{ διότι}$$

$$P\{d_k > \tau\} = P\{x > \tau, y > \tau\} = P\{x > \tau\}P\{y > \tau\} = e^{-\lambda_k\tau}e^{-\mu_k\tau} = e^{-(\lambda_k + \mu_k)\tau}$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ (2/3) επανάληψη

- Απείρως επισκέψιμες καταστάσεις $s = n(t)$ **positive recurrent states**: Με μη μηδενικές εργοδικές πιθανότητες $P\{n(t) = k\} = P_k(t) \rightarrow P_k > 0, k = 0, 1, 2, \dots$
- Σε μεγάλο χρονικό διάστημα παρατήρησης T ισορροπούν οι αριθμοί μεταβάσεων από και προς την κατάσταση s :

$$\#\{\text{ΜΕΤΑΒΑΣΕΩΝ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ } s\} = \#\{\text{ΕΚΤΟΣ ΤΗΣ } s\}$$

Σφαιρική Ισορροπία, Global Balance Equations

- Σε μεγάλο χρονικό διάστημα παρατήρησης T ισορροπούν οι αριθμοί μεταβάσεων μεταξύ δύο (όχι αναγκαστικά γειτονικών) καταστάσεων s_1 και s_2 :

$$\#\{\text{ΜΕΤΑΒΑΣΕΩΝ } s_1 \rightarrow s_2\} = \#\{\text{ΜΕΤΑΒΑΣΕΩΝ } s_2 \rightarrow s_1\}$$

Τοπική Ισορροπία, Local Balance Equations

- Λόγω **εργοδικότητας** σε μεγάλο χρονικό διάστημα παρατήρησης T , με T_1 και T_2 τους συνολικούς χρόνους παραμονής στις s_1, s_2 :

$$(1) \quad \#\{\text{ΜΕΤΑΒΑΣΕΩΝ } s_1 \rightarrow s_2\} = T_1 \times r_{1,2}$$

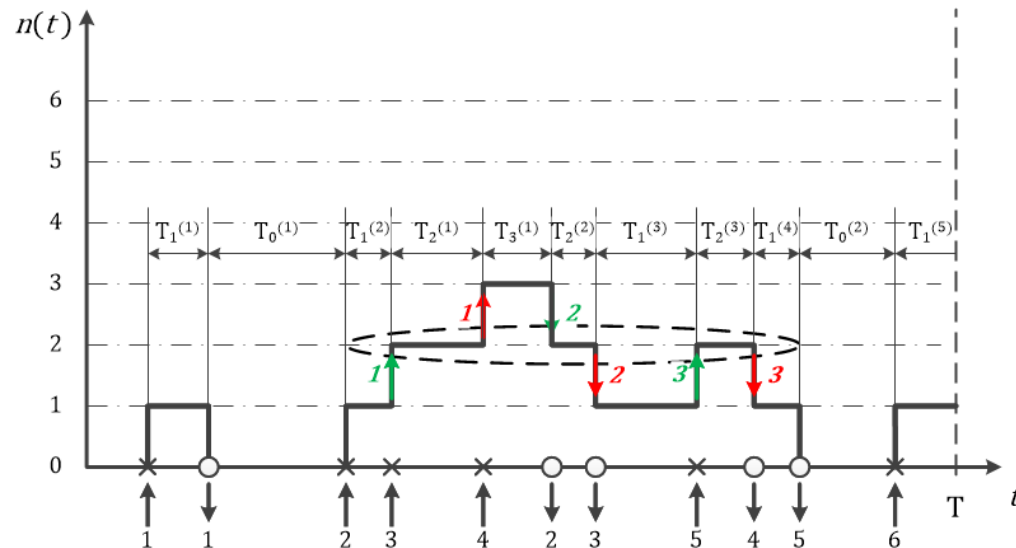
$$(2) \quad \#\{\text{ΜΕΤΑΒΑΣΕΩΝ } s_2 \rightarrow s_1\} = T_2 \times r_{2,1}$$

Όπου $r_{1,2}$ και $r_{2,1}$ οι μέσοι ρυθμοί μετάβασης από $s_1 \rightarrow s_2$ και $s_2 \rightarrow s_1$

- Λόγω **ισορροπίας**: (1) = (2) και $r_{1,2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_1}{T} = r_{2,1} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_2}{T}$ ή

$$r_{1,2} P_1 = r_{2,1} P_2 \quad \text{Local Balance Equations}$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ (3/3) επανάληψη



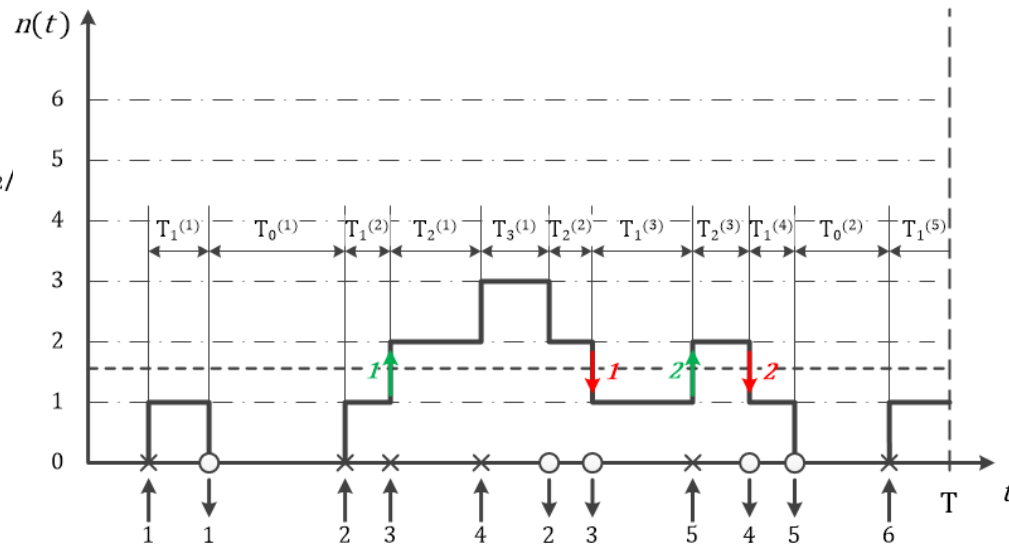
Global Balance Equation

$$T_1 = T_1^{(1)} + T_1^{(2)} + T_1^{(3)} + T_1^{(4)} + T_1^{(5)}$$

$$T_2 = T_2^{(1)} + T_2^{(2)} + T_2^{(3)}, T_3 = T_3^{(1)}$$

(State 2: **Transitions In** = **Transitions Out**)

$$\lambda T_1 + \mu T_3 \sim \lambda T_2 + \mu T_2 \Rightarrow (\lambda T_1 + \mu T_3)/T \sim (\lambda + \mu) (T_2/T) \\ \Rightarrow \lambda P_1 + \mu P_3 = (\lambda + \mu) P_2$$



Local Balance Equation

$$T_1 = T_1^{(1)} + T_1^{(2)} + T_1^{(3)} + T_1^{(4)} + T_1^{(5)}$$

$$T_2 = T_2^{(1)} + T_2^{(2)} + T_2^{(3)}$$

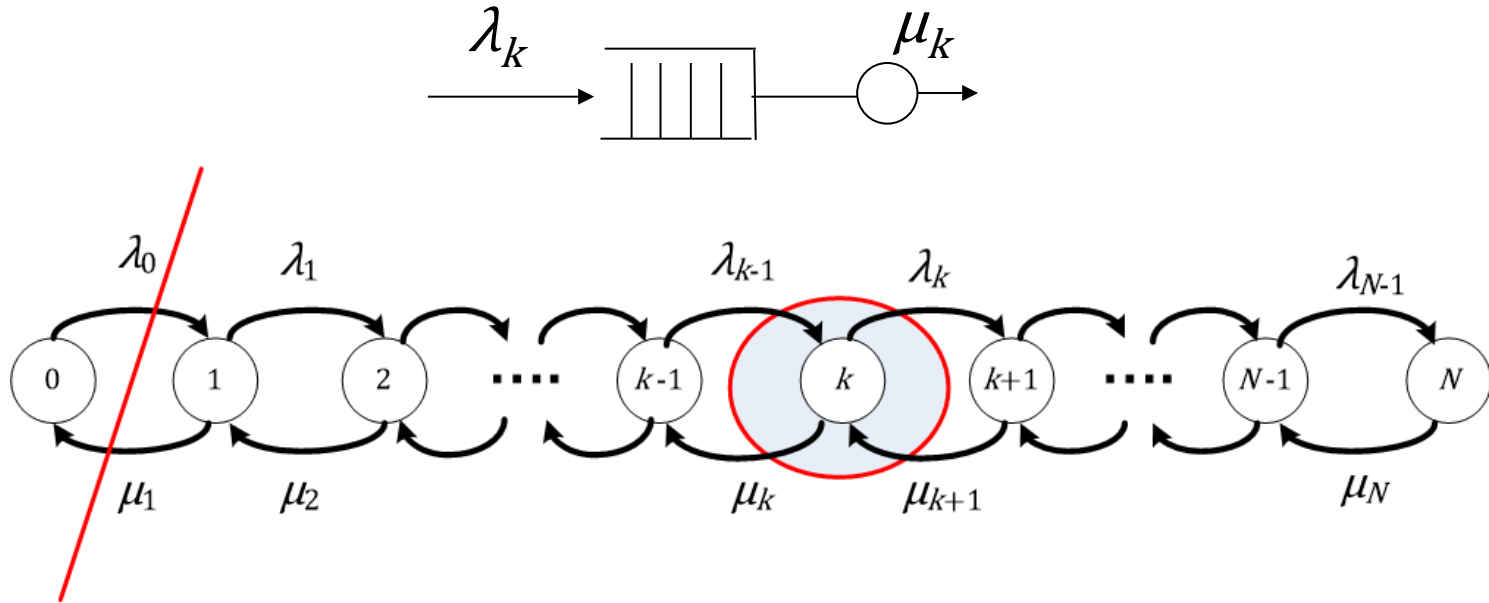
(**Transitions 1->2** = **Transitions 2->1**)

$$\lambda T_1 \sim \mu T_2 \Rightarrow \lambda (T_1/T) \sim \mu (T_2/T) \Rightarrow \lambda P_1 = \mu P_2$$

Σχηματική Απεικόνιση
Εξισώσεις Ισορροπίας στην Εργοδική Κατάσταση
Χρόνος Παρατήρησης Δείγματος $n(t)$: T

ΟΥΡΑ Μ/Μ/1/Ν (1/2) επανάληψη

- Συστήματα Μ/Μ/1/Ν με ρυθμούς άφιξης και ρυθμούς εξυπηρέτησης εξαρτώμενους από τον αριθμό των πελατών στο σύστημα (από την παρούσα κατάσταση του συστήματος)
(*State Dependent Μ/Μ/1/Ν Queues*)



Local Balance Equation

$$\begin{aligned} \lambda_0 P_0 &= \mu_1 P_1 \\ \lambda_{k-1} P_{k-1} &= \mu_k P_k \quad k = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

Global Balance Equation

$$\begin{aligned} \lambda_0 P_0 &= \mu_1 P_1 \\ (\lambda_k + \mu_k) P_k &= \lambda_{k-1} P_{k-1} + \mu_{k+1} P_{k+1} \quad k = 1, \dots, N \end{aligned}$$

Κανονικοποίηση Εργοδικών Πιθανοτήτων

$$P_0 + \dots + P_N = 1$$

ΟΥΡΑ Μ/Μ/1/Ν (2/2) επανάληψη

- Σταθεροί μέσοι ρυθμοί αφίξεων (γεννήσεων)

$$\lambda_k = \lambda, \text{ Poisson, } k = 1, 2, \dots, N$$

- Σταθεροί μέσοι ρυθμοί εξυπηρέτησης (θανάτων)

$$\mu_k = \mu, k = 1, 2, \dots, N$$

$$\text{Εκθετικοί ανεξάρτητοι χρόνοι εξυπηρέτησης } s, E(s) = 1/\mu$$

- Εργοδικές πιθανότητες καταστάσεων

$$P_k = \rho^k P_0, k = 0, 1, 2, \dots, N$$

$$P_0 + P_1 + \dots + P_{N-1} + P_N = 1$$

$$\rho = \lambda/\mu \text{ Erlangs (η Μ/Μ/1/Ν είναι πάντα ευσταθής γιατί υπερβολικό φορτίο δεν προωθείται)}$$

- Αντικαθιστώντας με τον τύπο πεπερασμένου αθροίσματος γεωμετρικής προόδου:

$$P_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}}, \quad \rho \neq 1$$

$$P_0 = \frac{1}{N + 1}, \quad \rho = 1$$

- Χρησιμοποίηση Εξυπηρετητή (Server Utilization) $U = 1 - P_0$
- Ρυθμαπόδοση (throughput) $\gamma = \lambda(1 - P_N) = \mu(1 - P_0) = \mu U$
- Πιθανότητα απώλειας $P_{blocking} = P_N$

- Στάσιμος Εργοδικός μέσος όρος πληθυσμού – κατάστασης

$$E[n(t)] \rightarrow E(k) = \sum_{k=1}^N k P_k = \rho \frac{1 - (N + 1)\rho^N + N\rho^{N+1}}{(1 - \rho)(1 - \rho^{N+1})}$$

- Νόμος του Little: $E(T) = E(k)/\gamma = E(k)/[\lambda(1 - P_N)]$

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

BIRTH-DEATH ΟΜΟΙΟΓΕΝΩΝ ΑΦΙΞΕΩΝ (1/2)

- Σε στοχαστικό σύστημα **Birth-Death** με αφίξεις (γεννήσεις) σταθερού μέσου ρυθμού λ ανεξάρτητου του πληθυσμού $n(t) = k$ (**ομοιογενείς αφίξεις Poisson** με ρυθμό $\lambda_k = \lambda$ αφίξεις/sec) οι εργοδικές πιθανότητες (αν υπάρχουν) μπορούν να υπολογισθούν σαν λόγος αφίξεων που βρίσκουν το σύστημα στη κατάσταση $n(t) = k$ στη χρονική διάρκεια T_k , προς τον συνολικό αριθμό αφίξεων σε μεγάλο χρονικό διάστημα παρατήρησης T μιας χρονικής εξέλιξης της διαδικασίας:

$$P_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_k}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\lambda T_k}{\lambda T} \approx \frac{\#\{\text{ΑΦΙΞΕΩΝ στη } n(t) = k \text{ σε ΧΡΟΝΙΚΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ } T_k\}}{\#\{\text{ΣΥΝΟΛΟΥ ΑΦΙΞΕΩΝ σε ΧΡΟΝΙΚΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ } T\}}$$

Άρα μπορούμε να προσομοιώσουμε σύστημα Birth-Death με ομοιογενείς αφίξεις καταμετρώντας τις αφίξεις στις διάφορες καταστάσεις που μεταβαίνει

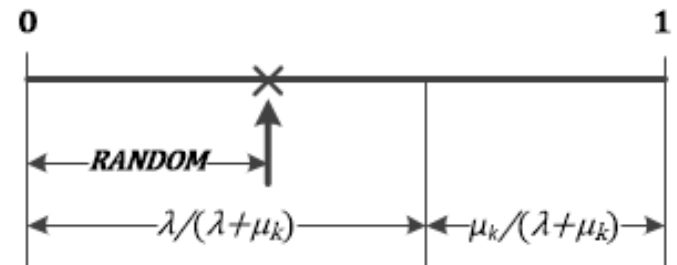
- Η εξέλιξη της κατάστασης (πληθυσμού) του συστήματος προκύπτει από τις πιθανότητες μετάβασης από την κατάσταση $n(t) = k$ στις $(k + 1)$, $(k - 1)$ με το δεδομένο ότι μια από τις δύο μεταβάσεις θα συμβεί με απόλυτη βεβαιότητα:

$$P[k \rightarrow (k + 1)/\text{μετάβαση}] = \lambda/(\lambda + \mu_k), \quad P[k \rightarrow (k - 1)/\text{μετάβαση}] = \mu_k/(\lambda + \mu_k)$$

- Η προσομοίωση ενεργοποιεί τις μεταβάσεις με κλήση τυχαίου αριθμού $RANDOM(0,1)$ ομοιόμορφα κατανεμημένου μεταξύ $(0, 1)$:

$$0 \leq RANDOM(0,1) \leq \frac{\lambda}{\lambda + \mu_k} \Rightarrow \text{ΑΦΙΞΗ}, n(t) \rightarrow k + 1$$

$$\frac{\lambda}{\lambda + \mu_k} < RANDOM(0,1) \leq 1 \Rightarrow \text{ΑΝΑΧΩΡΗΣΗ}, n(t) \rightarrow k - 1$$



- Αν το σύστημα έχει μηδενικό πληθυσμό $n(t) = 0$, η επόμενη μετάβαση είναι πάντα ΑΦΙΞΗ και $n(t) \rightarrow 1$
- Αν το σύστημα δεν επιδέχεται αύξηση πληθυσμού, η $n(t) = K$ είναι blocking state και δεν ενεργοποιείται μετάβαση κατάστασης, αλλά η διαδικασία τυχαίας δημιουργίας επόμενου γεγονότος (ΑΦΙΞΗ ή ΑΝΑΧΩΡΗΣΗ) καθώς και η μέτρηση αφίξεων συνεχίζονται κανονικά

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

BIRTH-DEATH ΟΜΟΙΟΓΕΝΩΝ ΑΦΙΞΕΩΝ (2/2)

Στατιστική Σύγκλιση Προσομοίωσης

- Η σύγκλιση της προσομοίωσης ελέγχεται ως προς την **στατιστική σύγκλιση** μεγεθών ενδιαφέροντος, π.χ. εκτίμηση μέσου πληθυσμού $E[n(t)] = \sum_{k=0}^K P_k$ που υπολογίζεται σε τακτά διαστήματα από την αρχή της προσομοίωσης π.χ. κάθε 1000 αφίξεις: (από 0 έως 1000 αφίξεις), (από 0 έως 2000 αφίξεις), (από 0 έως 3000 αφίξεις) κλπ.
- Λόγω **εργοδικότητας** δεν απαιτούνται επαναλήψεις: Η εκτέλεση του προγράμματος και οι μετρήσεις συνεχίζονται σε μία υλοποίηση που διακόπτεται προσωρινά π.χ. κάθε 1000 αφίξεις μέχρι την ικανοποίηση κριτηρίων σύγκλισης
- Η στατιστική σύγκλιση επιταχύνεται αν αγνοήσουμε στη καταμέτρηση αφίξεων στις διάφορες καταστάσεις τις πρώτες μεταβάσεις (π.χ. 1-1000 αφίξεις) που αντιστοιχούν στο **μεταβατικό φαινόμενο** προς την εργοδική κατάσταση
- **Εμπειρικός κανόνας**: Η ταχύτητα σύγκλισης είναι αντιστρόφως ανάλογη με τον βαθμό χρησιμοποίησης του συστήματος
- **Γενική Παρατήρηση**: Η σύγκλιση μιας προσομοίωσης είναι σύνηθες να διερευνάται με μαθηματικά εργαλεία στατιστικής (π.χ. τεστ χ^2) γιατί μπορεί να κρύβονται εξαρτήσεις (correlations) μεγεθών, περιοδικές συμπεριφορές που οδηγούν σε πρόωρους τερματισμούς κλπ. Μια πλήρης προσομοίωση περιλαμβάνει διαστήματα εμπιστοσύνης για τις εκτιμήσεις πιθανοτήτων και ροπών τυχαίων μεταβλητών (π.χ. μέσοι όροι, διασπορά)

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΟΥΡΑΣ M/M/1/10

<http://www.netmode.ntua.gr/courses/undergraduate/queues/simulation/>

RANDOM: Ομοιόμορφος τυχαίος αριθμός (0,1)

THRESHOLD: $\lambda / (\lambda + \mu)$

ARRIVALS: Συνολικός αριθμός αφίξεων

ARRIVAL[STATE]: Αριθμός αφίξεων στην κατάσταση STATE = 0, 1, ... , 10

COUNT: Αριθμός μεταβάσεων COUNT = 0, 1, ... , MAXIMUM

STATE: Κατάσταση ουράς (πληθυσμός συστήματος M/M/1/10) , STATE = 0, 1, ... , 10

P[STATE]: Εργοδική πιθανότητα STATE = 0, 1, ... , 10

AVERAGE: Μέσος πληθυσμός συστήματος M/M/1/10

INITIALIZE: COUNT = 0, STATE = 0, ARRIVALS = 0, ARRIVAL[0...10] = 0, P[0...10] = 0

ARRIVAL: ARRIVALS = ARRIVALS + 1
 ARRIVAL[STATE] = ARRIVAL[STATE] + 1
 COUNT = COUNT + 1
 IF STATE = 10 : **GO TO** LOOP
 ELSE : STATE = STATE + 1
 GO TO LOOP

LOOP : **IF** STATE = 0 : **GO TO** ARRIVAL
 ELSE :
 IF RANDOM < THRESHOLD : **GO TO** ARRIVAL
 ELSE : **GO TO** DEPARTURE

DEPARTURE : COUNT = COUNT + 1 ; STATE = STATE - 1
 IF COUNT < MAXIMUM : **GO TO** LOOP
 ELSE : P[STATE=1...10] = ARRIVAL[STATE= 1...10] / ARRIVALS
 AVERAGE = SUM { STATE ^ P[STATE] }, STATE = [1...10]

6^ο Μάθημα

Μοντέλα Ουρών Markov και Εφαρμογές:

Ουρά M/M/2

Σύστημα M/M/N/K, Erlang-C

Σύστημα M/M/c/c, Erlang-B

Ανάλυση & Σχεδιασμός Τηλεφωνικών Κέντρων

Βελτιστοποίηση Μέσου Μήκους Πακέτου

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

BIRTH-DEATH ΟΜΟΙΟΓΕΝΩΝ ΑΦΙΞΕΩΝ *επανάληψη*

- Σε στοχαστικό σύστημα **Birth-Death** με αφίξεις (γεννήσεις) σταθερού μέσου ρυθμού λ ανεξάρτητου του πληθυσμού $n(t) = k$ (**ομοιογενείς αφίξεις Poisson** με ρυθμό $\lambda_k = \lambda$ αφίξεις/sec) οι εργοδικές πιθανότητες (αν υπάρχουν) μπορούν να υπολογισθούν σαν λόγος αφίξεων που βρίσκουν το σύστημα στη κατάσταση $n(t) = k$ στη χρονική διάρκεια T_k , προς τον συνολικό αριθμό αφίξεων σε μεγάλο χρονικό διάστημα παρατήρησης T μιας χρονικής εξέλιξης της διαδικασίας:

$$P_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_k}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\lambda T_k}{\lambda T} \approx \frac{\#\{\text{ΑΦΙΞΕΩΝ στη } n(t) = k \text{ σε ΧΡΟΝΙΚΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ } T_k\}}{\#\{\text{ΣΥΝΟΛΟΥ ΑΦΙΞΕΩΝ σε ΧΡΟΝΙΚΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ } T\}}$$

Άρα μπορούμε να προσομοιώσουμε σύστημα Birth-Death με ομοιογενείς αφίξεις καταμετρώντας τις αφίξεις στις διάφορες καταστάσεις που μεταβαίνει

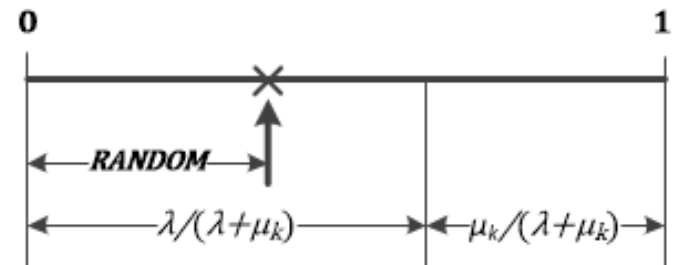
- Η εξέλιξη της κατάστασης (πληθυσμού) του συστήματος προκύπτει από τις πιθανότητες μετάβασης από την κατάσταση $n(t) = k$ στις $(k + 1)$, $(k - 1)$ με το δεδομένο ότι μια από τις δύο μεταβάσεις θα συμβεί με απόλυτη βεβαιότητα:

$$P[k \rightarrow (k + 1)/\text{μετάβαση}] = \lambda/(\lambda + \mu_k), \quad P[k \rightarrow (k - 1)/\text{μετάβαση}] = \mu_k/(\lambda + \mu_k)$$

- Η προσομοίωση ενεργοποιεί τις μεταβάσεις με κλήση τυχαίου αριθμού $RANDOM(0,1)$ ομοιόμορφα κατανεμημένου μεταξύ $(0, 1)$:

$$0 \leq RANDOM(0,1) \leq \frac{\lambda}{\lambda + \mu_k} \Rightarrow \text{ΑΦΙΞΗ}, n(t) \rightarrow k + 1$$

$$\frac{\lambda}{\lambda + \mu_k} < RANDOM(0,1) \leq 1 \Rightarrow \text{ΑΝΑΧΩΡΗΣΗ}, n(t) \rightarrow k - 1$$



- Αν το σύστημα έχει μηδενικό πληθυσμό $n(t) = 0$, η επόμενη μετάβαση είναι πάντα ΑΦΙΞΗ και $n(t) \rightarrow 1$
- Αν το σύστημα δεν επιδέχεται αύξηση πληθυσμού, η $n(t) = K$ είναι blocking state και δεν ενεργοποιείται μετάβαση κατάστασης, αλλά η διαδικασία τυχαίας δημιουργίας επόμενου γεγονότος (ΑΦΙΞΗ ή ΑΝΑΧΩΡΗΣΗ) καθώς και η μέτρηση αφίξεων συνεχίζονται κανονικά

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

BIRTH-DEATH ΟΜΟΙΟΓΕΝΩΝ ΑΦΙΞΕΩΝ επανάληψη

Στατιστική Σύγκλιση Προσομοίωσης

- Η σύγκλιση της προσομοίωσης ελέγχεται ως προς την **στατιστική σύγκλιση** μεγεθών ενδιαφέροντος, π.χ. εκτίμηση μέσου πληθυσμού $E[n(t)] = \sum_{k=0}^K P_k$ που υπολογίζεται σε τακτά διαστήματα από την αρχή της προσομοίωσης π.χ. κάθε 1000 αφίξεις: (από 0 έως 1000 αφίξεις), (από 0 έως 2000 αφίξεις), (από 0 έως 3000 αφίξεις) κλπ.
- Λόγω **εργοδικότητας** δεν απαιτούνται επαναλήψεις: Η εκτέλεση του προγράμματος και οι μετρήσεις συνεχίζονται σε μία υλοποίηση που διακόπτεται προσωρινά π.χ. κάθε 1000 αφίξεις μέχρι την ικανοποίηση κριτηρίων σύγκλισης
- Η στατιστική σύγκλιση επιταχύνεται αν αγνοήσουμε στη καταμέτρηση αφίξεων στις διάφορες καταστάσεις τις πρώτες μεταβάσεις (π.χ. 1-1000 αφίξεις) που αντιστοιχούν στο **μεταβατικό φαινόμενο** προς την εργοδική κατάσταση
- **Εμπειρικός κανόνας**: Η ταχύτητα σύγκλισης είναι αντιστρόφως ανάλογη με τον βαθμό χρησιμοποίησης του συστήματος
- **Γενική Παρατήρηση**: Η σύγκλιση μιας προσομοίωσης είναι σύνηθες να διερευνάται με μαθηματικά εργαλεία στατιστικής (π.χ. τεστ χ^2) γιατί μπορεί να κρύβονται εξαρτήσεις (correlations) μεγεθών, περιοδικές συμπεριφορές που οδηγούν σε πρόωρους τερματισμούς κλπ. Μια πλήρης προσομοίωση περιλαμβάνει διαστήματα εμπιστοσύνης για τις εκτιμήσεις πιθανοτήτων και ροπών τυχαίων μεταβλητών (π.χ. μέσοι όροι, διασπορά)

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΟΥΡΑΣ Μ/Μ/1/10 επανάληψη

<http://www.netmode.ntua.gr/courses/undergraduate/queues/simulation/>

RANDOM: Ομοιόμορφος τυχαίος αριθμός (0,1)

THRESHOLD: $\lambda / (\lambda + \mu)$

ARRIVALS: Συνολικός αριθμός αφίξεων

ARRIVAL[STATE]: Αριθμός αφίξεων στην κατάσταση STATE = 0, 1, ... , 10

COUNT: Αριθμός μεταβάσεων COUNT = 0, 1, ... , MAXIMUM

STATE: Κατάσταση ουράς (πληθυσμός συστήματος Μ/Μ/1/10) , STATE = 0, 1, ... , 10

P[STATE]: Εργοδική πιθανότητα STATE = 0, 1, ... , 10

AVERAGE: Μέσος πληθυσμός συστήματος Μ/Μ/1/10

INITIALIZE: COUNT = 0, STATE = 0, ARRIVALS = 0, ARRIVAL[0...10] = 0, P[0...10] = 0

ARRIVAL: ARRIVALS = ARRIVALS + 1
 ARRIVAL[STATE] = ARRIVAL[STATE] + 1
 COUNT = COUNT + 1
 IF STATE = 10 : **GO TO** LOOP
 ELSE : STATE = STATE + 1
 GO TO LOOP

LOOP : **IF** STATE = 0 : **GO TO** ARRIVAL
 ELSE :
 IF RANDOM < THRESHOLD : **GO TO** ARRIVAL
 ELSE : **GO TO** DEPARTURE

DEPARTURE : COUNT = COUNT + 1 ; STATE = STATE - 1
 IF COUNT < MAXIMUM : **GO TO** LOOP
 ELSE : P[STATE=1...10] = ARRIVAL[STATE= 1...10] / ARRIVALS
 AVERAGE = SUM { STATE ^ P[STATE] }, STATE = [1...10]

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΟΥΡΑΣ M/M/1/10

<http://www.netmode.ntua.gr/courses/undergraduate/queues/simulation/>

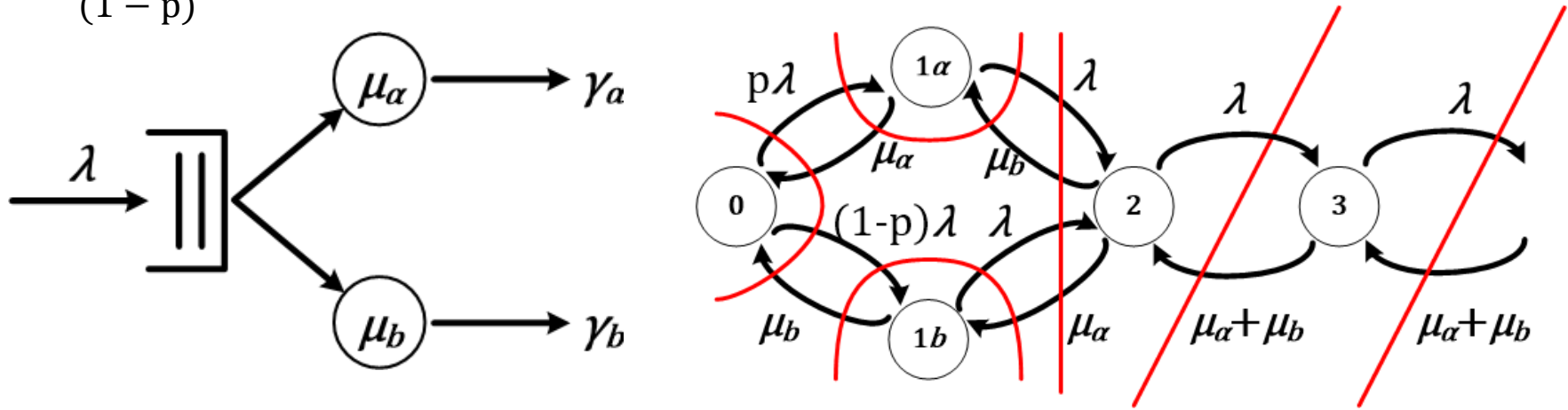
- Προετοιμασία Προγράμματος Προσομοίωσης Ουράς M/M/1/10 (**εξάσκηση ενόψει Εργασίας Προσομοίωσης**)
- Γλώσσα προγραμματισμού: Γενικής φύσεως (Java, Python, C, C++...) και όχι εξειδικευμένη γλώσσα Προσομοίωσης
- Υπολογισμός εργοδικών πιθανοτήτων P_k , $E(k) = \sum_{k=0}^{10} P_k$ και $P_{\text{blocking}} = P_{10}$ για $\lambda = 1$ και $1/\mu = 0.5, 0.75, 0.85$ με μετρητές αφίξεων στις καταστάσεις $n(t) = k$ από την αρχή μέχρι 5.000, 10.000, 15.000 ... αφίξεις. Σύγκριση με γνωστά αναλυτικά αποτελέσματα ουράς M/M/1/10:

$$P_k = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k, \quad \sum_{k=0}^{10} P_k = 1$$

- Μέτρο σύγκλισης: Διαφορά μεταξύ διαδοχικών μετρήσεων του μέσου μήκους ουράς (από την αρχή μέχρι 5.000, 10.000, 15.000... αφίξεις) μέχρι εξαντλήσεως του διαθέσιμου χρόνου αν δεν διαπιστωθεί σύγκλιση νωρίτερα (όριο 200.000 γεγονότα, αφίξεις + εξυπηρετήσεις)
- **Υπενθύμιση:** Η στατιστική σύγκλιση επιταχύνεται αν αγνοήσουμε στη καταμέτρηση αφίξεων στις διάφορες καταστάσεις τις πρώτες μεταβάσεις (π.χ. 1-5.000 αφίξεις) που αντιστοιχούν στο **μεταβατικό φαινόμενο** προς την εργοδική κατάσταση
- **Γενική Οδηγία:** Για debugging εξάγεται αρχικά λεπτομερές **trace** των μεταβάσεων της κατάστασης του συστήματος το οποίο θα απενεργοποιηθεί μετά την επιβεβαίωση της ορθότητας του κώδικα

ΟΥΡΑ Μ/Μ/2

- Αφίξεις Poisson με ρυθμό $\lambda_k = \lambda$
- 2 ανεξάρτητοι εκθετικοί εξυπηρετητές $(\alpha), (b)$ με άνισους ρυθμούς μ_α, μ_b
- Άπειρη Χωρητικότητα
- Άφιξη σε άδειο σύστημα δρομολογείται στον (α) με πιθανότητα p και στον (b) με πιθανότητα $(1 - p)$



Εξισώσεις Ισορροπίας:

$$\lambda P_0 = \mu_\alpha P_{1\alpha} + \mu_b P_{1b}$$

$$(\lambda + \mu_\alpha) P_{1\alpha} = p\lambda P_0 + \mu_b P_2$$

$$(\lambda + \mu_b) P_{1b} = (1-p)\lambda P_0 + \mu_\alpha P_2$$

$$\lambda(P_{1\alpha} + P_{1b}) = (\mu_\alpha + \mu_b) P_2, \lambda P_k = (\mu_\alpha + \mu_b) P_{k+1}, k = 2, 3, \dots$$

$$P_0 + P_{1\alpha} + P_{1b} + P_2 + P_3 + \dots = 1, \lambda/(\mu_\alpha + \mu_b) < 1 \text{ για σύγκληση (εργοδικότητα)}$$

Βαθμοί Χρησιμοποίησης – Ρυθμαποδόσεις Εξυπηρετητών:

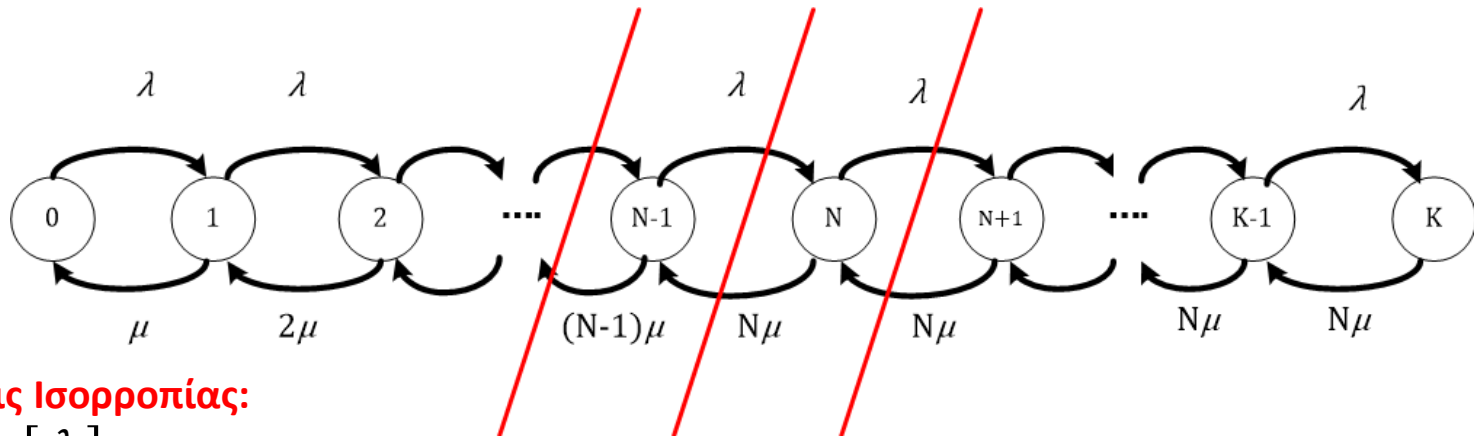
$$U_\alpha = 1 - P_0 - P_{1b} \quad \gamma_\alpha = \mu_\alpha U_\alpha$$

$$U_b = 1 - P_0 - P_{1\alpha} \quad \gamma_b = \mu_b U_b$$

$$\gamma = \lambda = \gamma_\alpha + \gamma_b$$

ΟΥΡΑ Μ/Μ/Ν/Κ

- Αφίξεις Poisson με ρυθμό $\lambda_k = \lambda$
- N ανεξάρτητοι εκθετικοί εξυπηρετητές με ίσους ρυθμούς μ
- Χωρητικότητα K , $N \leq K$ (π.χ. **call center** με N εξυπηρετητές & δυνατότητα αναμονής μέχρι $K - N$ κλήσεις)
- Ρυθμοί εξυπηρέτησης
 - $\mu_k = k\mu$, $k = 1, 2, \dots, N$
 - $\mu_k = N\mu$, $k = N, N + 1, \dots, K - 1, K$
- Εργοδική κατάσταση $n(t)$: Αριθμός πελατών στο σύστημα, αδιάφορα από χρήση συγκεκριμένων εξυπηρετητών (π.χ. σε σύστημα Μ/Μ/2, $\mu_a = \mu_b = \mu$, $P_1 = P_{1a} + P_{1b}$)



Εξισώσεις Ισορροπίας:

$$P_k = \left[\frac{\lambda}{k\mu} \right] P_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, N - 1$$

$$P_k = \left[\frac{\lambda}{N\mu} \right] P_{k-1}, \quad k = N, N + 1, \dots, K - 1, K$$

$$P_0 + P_1 + \dots + P_{K-1} + P_K = 1, \quad P_K = P_{\text{blocking}}, \quad \gamma = \lambda (1 - P_{\text{blocking}})$$

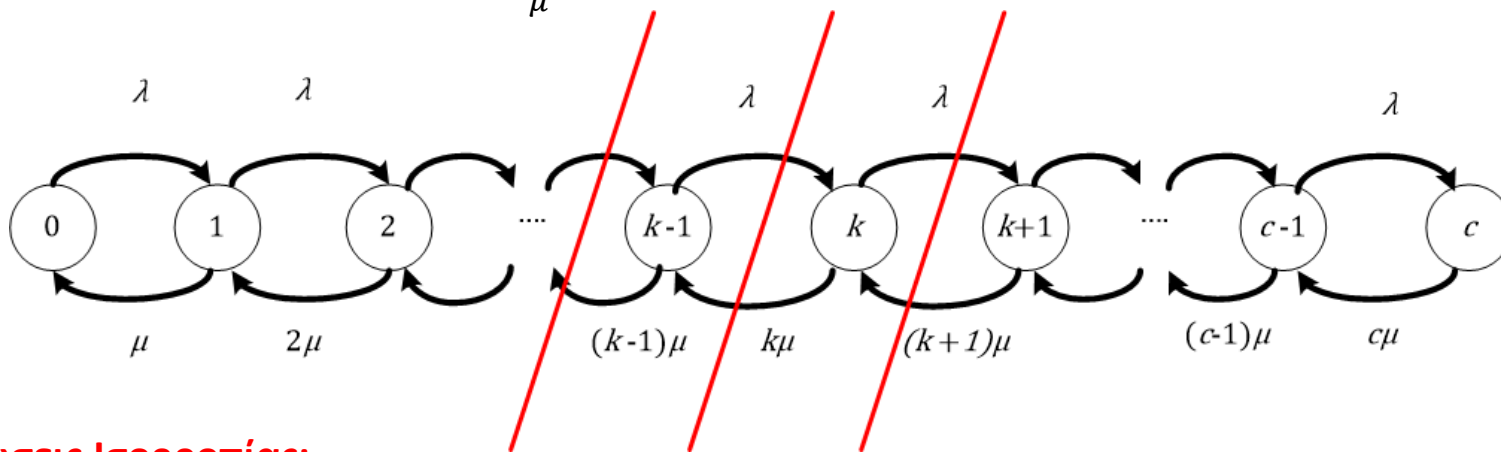
$$P_{\text{waiting}} = P_N + P_{N+1} + \dots + P_K = 1 - (P_0 + P_1 + \dots + P_{N-1}) \quad (\text{Erlang-C Formula})$$

ΟΥΡΑ Μ/Μ/σ/σ

(τηλεφωνικό κέντρο με c εξωτερικές γραμμές, trunks)

- Αφίξεις Poisson με ρυθμό $\lambda_n = \lambda$ (εξωτερικές κλήσεις - τηλεφωνήματα/sec)
- c ανεξάρτητοι εκθετικοί εξυπηρετητές (εξωτερικές γραμμές τηλεφωνικού κέντρου)
- Χωρητικότητα c πελάτες (τηλεφωνήματα, εξωτερικές κλήσεις)
- Ρυθμοί εξυπηρέτησης εκθετικοί

$\mu_k = k\mu, k = 1, 2, \dots, c \quad \frac{1}{\mu} = E(s)$: Μέση Διάρκεια Τηλεφωνήματος (π.χ. 3 min ή 180 sec)



Εξισώσεις Ισορροπίας:

$$P_k = \left[\frac{\lambda}{k\mu} \right] P_{k-1} = \left(\frac{\rho^k}{k!} \right) P_0, \quad k = 1, 2, \dots, c \quad \rho \triangleq \frac{\lambda}{\mu} \text{ Erlangs}$$

$$P_0 + P_1 + \dots + P_{c-1} + P_c = 1 \Rightarrow P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^c \frac{\rho^k}{k!}}$$

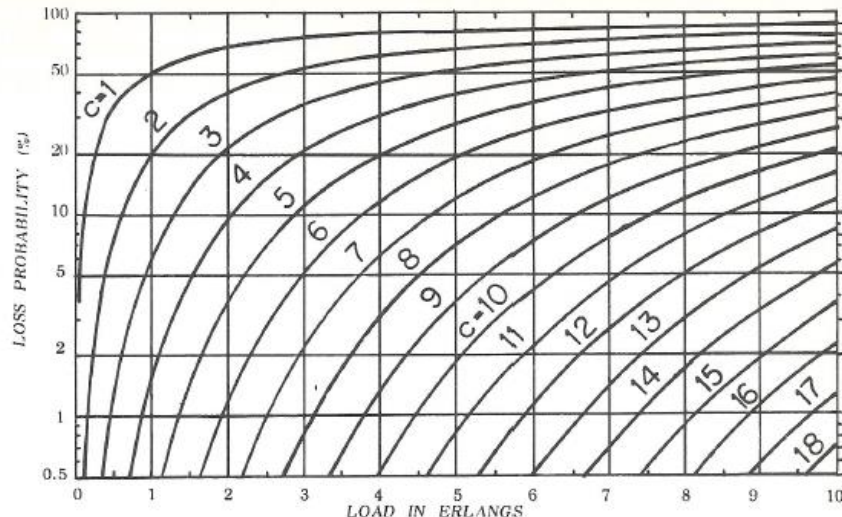
$$P_c = P_{\text{blocking}} = \frac{\rho^c / c!}{\sum_{k=0}^c \frac{\rho^k}{k!}} \triangleq B(\rho, c) \text{ (Erlang-B Formula)}$$

ΠΙΝΑΚΕΣ Erlang B(ρ, c)

Αναδρομικός Υπολογισμός

$$B(\rho, 0) = 1$$

$$B(\rho, n) = \frac{\rho B(\rho, n-1)}{\rho B(\rho, n-1) + n}, \quad n = 1, 2, \dots, c$$



ρ	$c=1$	2	3	4	5	6	7	8
0.00	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
0.25	.2000	.0244	.0020	.0001	**	*	*	*
0.50	.3333	.0769	.0127	.0016	.0002	**	*	*
0.75	.4286	.1385	.0335	.0062	.0010	.0001	**	*
1.00	.5000	.2000	.0625	.0154	.0031	.0005	.0001	**
1.25	.5556	.2577	.0970	.0294	.0073	.0015	.0003	**
1.50	.6000	.3103	.1343	.0480	.0142	.0035	.0008	.0001
1.75	.6364	.3577	.1726	.0702	.0240	.0070	.0017	.0004
2.00	.6667	.4000	.2105	.0952	.0367	.0121	.0034	.0009
2.25	.6923	.4378	.2472	.1221	.0521	.0192	.0061	.0017
2.50	.7143	.4717	.2822	.1499	.0697	.0282	.0100	.0031
2.75	.7333	.5021	.3152	.1781	.0892	.0393	.0152	.0052
3.00	.7500	.5294	.3462	.2062	.1101	.0522	.0219	.0081
3.25	.7647	.5541	.3751	.2336	.1318	.0666	.0300	.0121
3.50	.7778	.5765	.4021	.2603	.1541	.0825	.0396	.0170
3.75	.7895	.5968	.4273	.2860	.1766	.0994	.0506	.0232
4.00	.8000	.6154	.4507	.3107	.1991	.1172	.0628	.0304
4.25	.8095	.6324	.4725	.3343	.2213	.1355	.0760	.0388
4.50	.8182	.6480	.4929	.3567	.2430	.1542	.0902	.0483
4.75	.8261	.6624	.5119	.3781	.2643	.1730	.1051	.0587
5.00	.8333	.6757	.5287	.3983	.2849	.1919	.1205	.0701
5.25	.8400	.6880	.5463	.4176	.3048	.2106	.1364	.0822
5.50	.8462	.6994	.5618	.4358	.3241	.2290	.1525	.0949
5.75	.8519	.7101	.5764	.4531	.3426	.2472	.1688	.1082
6.00	.8571	.7200	.5902	.4696	.3604	.2649	.1851	.1219
6.25	.8621	.7293	.6031	.4852	.3775	.2822	.2013	.1359
6.50	.8667	.7380	.6152	.4999	.3939	.2991	.2174	.1501
6.75	.8710	.7462	.6267	.5140	.4096	.3155	.2333	.1644
7.00	.8750	.7539	.6376	.5273	.4247	.3313	.2489	.1788
7.25	.8788	.7611	.6478	.5401	.4392	.3467	.2642	.1932

ρ	$c=9$	10	11	12	13	14	15	16
0.00	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
0.25								
0.50								
0.75								
1.00	*							
1.25	**							
1.50	**	*						
1.75	.0001	**	*					
2.00	.0002	**	**					
2.25	.0004	.0001	**	*				
2.50	.0009	.0002	.0001	**	*			
2.75	.0016	.0004	.0001	**	**			
3.00	.0027	.0008	.0002	.0001	**	*		
3.25	.0043	.0014	.0004	.0001	**	**		
3.50	.0066	.0023	.0007	.0002	.0001	**	*	
3.75	.0096	.0036	.0012	.0004	.0001	**	**	
4.00	.0133	.0053	.0019	.0006	.0002	.0001	**	*
4.25	.0180	.0076	.0029	.0010	.0003	.0001	**	**
4.50	.0236	.0105	.0043	.0016	.0006	.0002	.0001	**
4.75	.0301	.0141	.0060	.0024	.0009	.0003	.0001	**
5.00	.0375	.0184	.0083	.0034	.0013	.0005	.0002	.0001
5.25	.0457	.0234	.0111	.0048	.0019	.0007	.0003	.0001
5.50	.0548	.0293	.0144	.0066	.0028	.0011	.0004	.0001
5.75	.0647	.0358	.0184	.0087	.0039	.0016	.0006	.0002
6.00	.0751	.0431	.0230	.0114	.0052	.0022	.0009	.0003
6.25	.0862	.0511	.0282	.0145	.0069	.0031	.0013	.0005
6.50	.0978	.0598	.0341	.0181	.0090	.0042	.0018	.0007
6.75	.1098	.0690	.0406	.0223	.0115	.0055	.0025	.0010
7.00	.1221	.0787	.0477	.0271	.0144	.0071	.0033	.0015
7.25	.1347	.0890	.0554	.0324	.0177	.0091	.0044	.0020

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΤΗΛΕΦΩΝΙΚΟΥ ΚΕΝΤΡΟΥ

- Τηλεφωνικό Κέντρο με 7 εξωτερικές γραμμές προωθεί κίνηση (προς τις 2 κατευθύνσεις) με μέσο ρυθμό κλήσεων 2 κλήσεις το λεπτό με μέση διάρκεια κλήσης 3 min
- Θεωρώ ότι οι εξωτερικές κλήσεις ακολουθούν διαδικασία **Poisson** με μέσο ρυθμό $\lambda = 2$ κλήσεις/min και χρόνο εξυπηρέτησης **Εκθετικό** με μέση διάρκεια $1/\mu = 3$ min, άρα το συνολικό προσφερόμενο φορτίο (**offered traffic**) είναι

$$\rho = \lambda/\mu = 6 \text{ Erlangs}$$

- Υποθέτουμε πως οι κλήσεις που δεν βρίσκουν γραμμή χάνονται οριστικά. Άρα η πιθανότητα απώλειας δίνεται από τον τύπο

$$B(\rho, c) = B(6, 7) = 18.51\%$$

- Το εξυπηρετούμενο φορτίο (**carried traffic**) είναι

$$\rho[1 - B(\rho, c)] = \frac{\lambda}{\mu} [1 - B(\rho, c)] = \frac{\gamma}{\mu} = 4.8894 \text{ Erlangs}$$

- Το φορτίο υπερχείλισης (**overflow traffic**) είναι

$$\rho B(\rho, c) = 1.1106 \text{ Erlangs}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΤΗΛΕΦΩΝΙΚΟΥ ΚΕΝΤΡΟΥ

- Τηλεφωνικό Κέντρο με c εξωτερικές γραμμές (trunks) προωθεί κίνηση (προς τις 2 κατευθύνσεις) με μέσο ρυθμό κλήσεων 2 κλήσεις το λεπτό με μέση διάρκεια κλήσης 3 min.
- Θεωρώ ότι οι εξωτερικές κλήσεις ακολουθούν διαδικασία **Poisson** με μέσο ρυθμό $\lambda = 2$ κλήσεις/min και χρόνο εξυπηρέτησης **Εκθετικό** με μέση διάρκεια $\frac{1}{\mu} = 3$ min, άρα το συνολικό προσφερόμενο φορτίο (**offered traffic**) είναι

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 6 \text{ Erlangs}$$

- Υποθέτουμε πως οι κλήσεις που δεν βρίσκουν γραμμή χάνονται οριστικά. Ζητείται ο απαιτούμενος αριθμός εξωτερικών γραμμών (trunks) c ώστε ο ρυθμός απωλειών (**Grade of Service, GOS**) να είναι μικρότερος από 0.3%
- Από τους πίνακες προκύπτει πως $B(6,13) = 0.52\%$ και $B(6,14) = 0.24\%$, άρα οι απαιτήσεις καλύπτονται με ελάχιστο αριθμό εξωτερικών γραμμών $c = 14$ trunks

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΜΕΣΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΠΑΚΕΤΟΥ ΣΕ ΔΙΚΤΥΟ ΤΥΠΟΥ INTERNET

- 10 υπολογιστές (H/Y) διασυνδέονται σε Δίκτυο μέσω μεταγωγέα πακέτου (**Router** ή **Ethernet Switch**) που τα προωθεί προς τον προορισμό τους. Η ταχύτητα της πολυπλεγμένης εξόδου (**trunk port**) είναι $C = 100$ Mbps
- Τα δεδομένα παράγονται στους H/Y σε μορφή πακέτων (πλαισίων) μεταβλητού μήκους L bits (**data payload**). Θεωρείστε πως κάθε H/Y παράγει δεδομένα που αντιστοιχούν σε 1 Mbps κατά μέσο όρο
- Οι H/Y προσθέτουν σε κάθε πακέτο επικεφαλίδα (**header**) με υποχρεωτικές πληροφορίες πρωτοκόλλου (**protocol overhead** με διευθύνσεις, σηματοδοσία ελέγχου, ανίχνευσης λαθών κλπ.) μήκους 200 bits
- Θεωρείστε πως ο μεταγωγέας έχει άπειρη χωρητικότητα αποθήκευσης πακέτων, το συνολικό μήκος πακέτου $(L + 200)$ bits είναι κατά προσέγγιση **Εκθετικά** κατανεμημένο και πως η συνολική ροή πακέτων γίνεται με διαδικασία **Poisson**
- Βρείτε το μέσο ωφέλιμο μήκος πακέτου $E(L)$ που να βελτιστοποιεί την μέση καθυστέρηση προώθησης πακέτου στο μεταγωγέα
- Θεωρείστε πως η ανάστροφη ροή πακέτων **Δίκτυο $\rightarrow$ H/Y** γίνεται ανεξάρτητα από την ροή **H/Y $\rightarrow$ Δίκτυο** (FDX) και πως η στατιστική συμπεριφορά των δύο κατευθύνσεων είναι συμμετρική

Λύση

- Θεωρώ μοντέλο ουράς M/M/1 με

$$\lambda = \frac{10 \times 10^6}{E(L)} = 10^7 / E(L) \text{ packets/sec}$$

$$\mu = \frac{C}{200 + E(L)} \text{ sec}^{-1} = 10^8 / [200 + E(L)] \text{ sec}^{-1}$$

- Η μέση καθυστέρηση δίνεται από τον τύπο

$$E(T) = \frac{1/\mu}{1 - \lambda/\mu} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$E(T) = \frac{1}{\frac{10^8}{200 + E(L)} - \frac{10^7}{E(L)}}$$

- Με $E(L) = x$, ελαχιστοποιώ την συνάρτηση

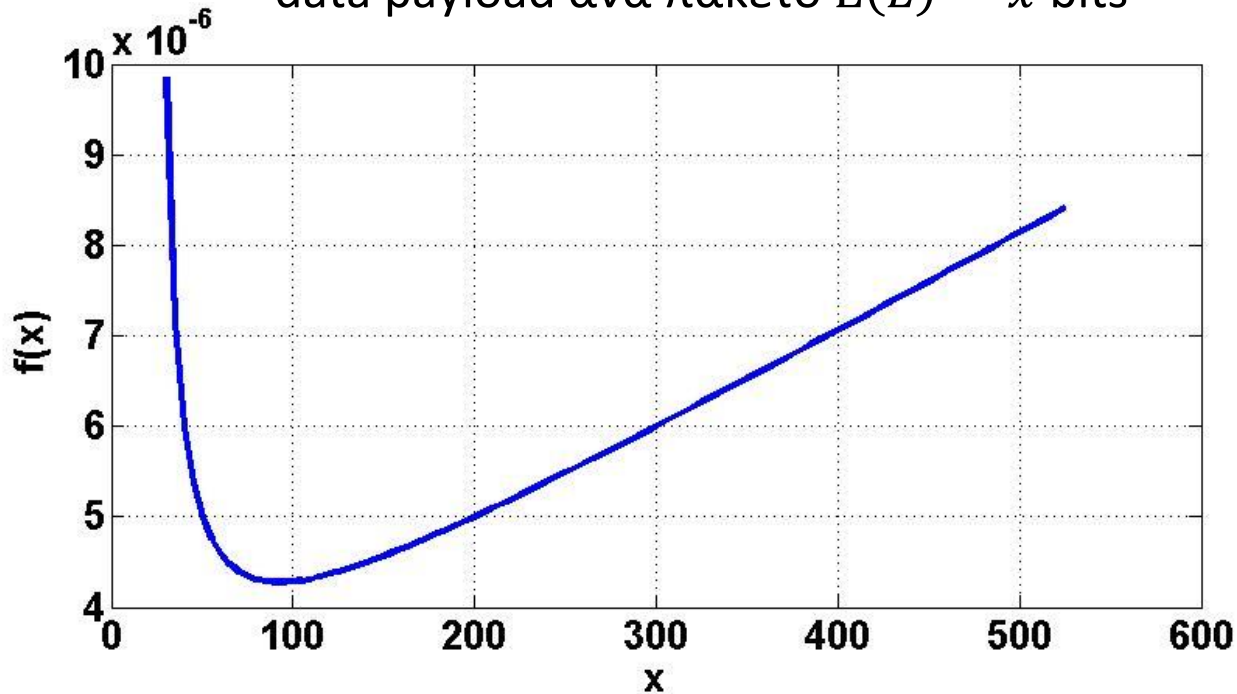
$$f(x) = \frac{1}{\frac{10^8}{200 + x} - \frac{10^7}{x}} = \frac{x(200 + x)}{10^7(9x - 200)}$$

και βρίσκω το βέλτιστο μέσο payload ανά πακέτο $E(L) = x$ όταν $\frac{df(x)}{dx} = 0 \Rightarrow$

$$\text{optimal}\{E(L)\} \cong 92.495 \text{ bits}$$

- Προσοχή:** Για εργοδικότητα πρέπει $\rho = \lambda/\mu < 1$ και $E(L) > 200/9 = 22.222 \text{ bits}$

$E(T) = f(x)$ σαν συνάρτηση του μέσου
data payload ανά πακέτο $E(L) = x$ bits



- **Μεγάλο μήκος ωφέλιμου φορτίου $E(L)$:** Μεγάλη καθυστέρηση λόγω αυξημένων απαιτήσεων πακετοποίησης μεγάλων πακέτων (+ προβλήματα μεγάλης πιθανότητας σφάλματος $\Rightarrow$ συχνές επαναμεταδόσεις και ανάγκη μεγάλου μεγέθους buffers)
- **Μικρό μήκος ωφέλιμου φορτίου $E(L)$:** Μεγάλες απαιτήσεις πρόσθετου σταθερού overhead πρωτοκόλλων σε σχέση με το ωφέλιμο φορτίο πακέτων

Τα πακέτα έχουν ελάχιστο μέσο μέγεθος ωφέλιμου φορτίου $E(L) = 22.222$ bits (**data payload**), αλλιώς ο μεταγωγέας πλημμυρίζει από υπερβολικό αριθμό μικρών πακέτων με κυρίαρχο το αναγκαστικό **protocol overhead** (200 bits/πακέτο) και ελάχιστο ωφέλιμο φορτίο L

7^ο Μάθημα

Άσκηση Προσομοίωσης

Στατιστικές Εξόδου Ουράς $M/M/1$ - Θεώρημα Burke

Ανοικτά Δίκτυα Ουρών $M/M/1$ - Θεώρημα Jackson

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΟΥΡΑΣ M/M/1/10 (επανάληψη)

<http://www.netmode.ntua.gr/courses/undergraduate/queues/simulation/>

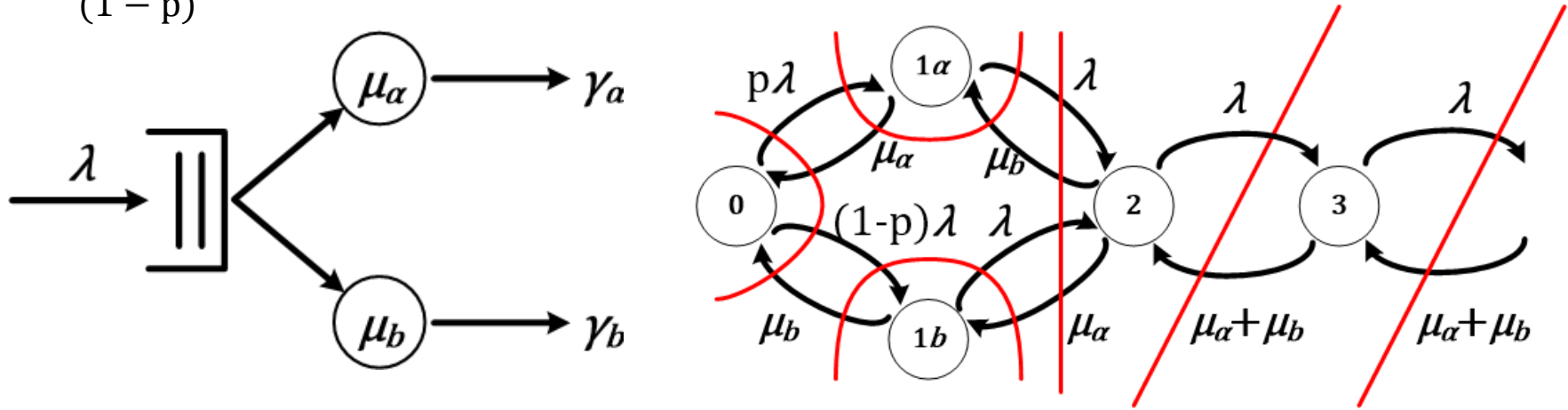
- Προετοιμασία Προγράμματος Προσομοίωσης Ουράς M/M/1/10 (**εξάσκηση ενόψει Εργασίας Προσομοίωσης**)
- Γλώσσα προγραμματισμού: Γενικής φύσεως (Java, Python, C, C++...) και όχι εξειδικευμένη γλώσσα Προσομοίωσης
- Υπολογισμός εργοδικών πιθανοτήτων P_k , $E(k) = \sum_{k=0}^{10} P_k$ και $P_{\text{blocking}} = P_{10}$ για $\lambda = 1$ και $1/\mu = 0.5, 0.75, 0.85$ με μετρητές αφίξεων στις καταστάσεις $n(t) = k$ από την αρχή μέχρι 5.000, 10.000, 15.000 ... αφίξεις. Σύγκριση με γνωστά αναλυτικά αποτελέσματα ουράς M/M/1/10:

$$P_k = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k, \quad \sum_{k=0}^{10} P_k = 1$$

- Μέτρο σύγκλισης: Διαφορά μεταξύ διαδοχικών μετρήσεων του μέσου μήκους ουράς (από την αρχή μέχρι 5.000, 10.000, 15.000... αφίξεις) μέχρι εξαντλήσεως του διαθέσιμου χρόνου αν δεν διαπιστωθεί σύγκλιση νωρίτερα (όριο 200.000 γεγονότα, αφίξεις + εξυπηρετήσεις)
- **Υπενθύμιση:** Η στατιστική σύγκλιση επιταχύνεται αν αγνοήσουμε στη καταμέτρηση αφίξεων στις διάφορες καταστάσεις τις πρώτες μεταβάσεις (π.χ. 1-5.000 αφίξεις) που αντιστοιχούν στο **μεταβατικό φαινόμενο** προς την εργοδική κατάσταση
- **Γενική Οδηγία:** Για debugging εξάγεται αρχικά λεπτομερές **trace** των μεταβάσεων της κατάστασης του συστήματος το οποίο θα απενεργοποιηθεί μετά την επιβεβαίωση της ορθότητας του κώδικα

ΟΥΡΑ Μ/Μ/2 (επανάληψη)

- Αφίξεις Poisson με ρυθμό $\lambda_k = \lambda$
- 2 ανεξάρτητοι εκθετικοί εξυπηρετητές (α), (b) με άνισους ρυθμούς μ_α, μ_b
- Άπειρη Χωρητικότητα
- Άφιξη σε άδειο σύστημα δρομολογείται στον (α) με πιθανότητα p και στον (b) με πιθανότητα $(1 - p)$



Εξισώσεις Ισορροπίας:

$$\lambda P_0 = \mu_\alpha P_{1\alpha} + \mu_b P_{1b}$$

$$(\lambda + \mu_\alpha) P_{1\alpha} = p\lambda P_0 + \mu_b P_2$$

$$(\lambda + \mu_b) P_{1b} = (1-p)\lambda P_0 + \mu_\alpha P_2$$

$$\lambda(P_{1\alpha} + P_{1b}) = (\mu_\alpha + \mu_b) P_2, \lambda P_k = (\mu_\alpha + \mu_b) P_{k+1}, k = 2, 3, \dots$$

$$P_0 + P_{1\alpha} + P_{1b} + P_2 + P_3 + \dots = 1, \lambda/(\mu_\alpha + \mu_b) < 1 \text{ για σύγκληση (εργοδικότητα)}$$

Βαθμοί Χρησιμοποίησης – Ρυθμαποδόσεις Εξυπηρετητών:

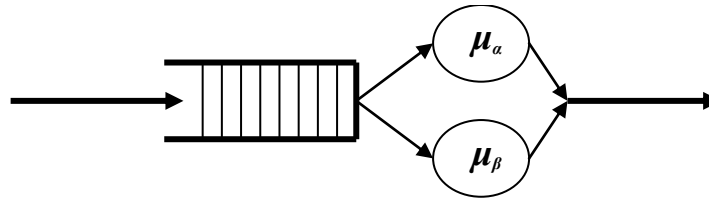
$$U_\alpha = 1 - P_0 - P_{1b} \quad \gamma_\alpha = \mu_\alpha U_\alpha$$

$$U_b = 1 - P_0 - P_{1\alpha} \quad \gamma_b = \mu_b U_b$$

$$\gamma = \lambda = \gamma_\alpha + \gamma_b$$

ΑΣΚΗΣΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

Ουρά M/M/2/10 με Κατώφλι k



- Αριθμός πελατών στο σύστημα είναι μικρότερος ή ίσος του k ($k = 1, \dots, 9$) οι αφίξεις δρομολογούνται πάντα στον εξυπηρετητή α , ο δε β παραμένει ανενεργός (idle). Ο εξυπηρετητής β ενεργοποιείται όταν ο αριθμός των πελατών στο σύστημα ξεπεράσει το κατώφλι k
- Αφίξεις Poisson, μέσου ρυθμού $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ και $\lambda = 3$ πελάτες/sec (τρεις περιπτώσεις), ανεξάρτητες εκθετικές εξυπηρετήσεις ρυθμού $\mu_\alpha = \mu_\beta = 4$ πελάτες/sec
- Με απλή προσομοίωση συστημάτων Markov να υπολογιστούν και να παρασταθούν γραφικά:
 - Ο μέσος αριθμός των πελατών στο σύστημα για $k=1, \dots, 9$ για τις τρεις περιπτώσεις ρυθμού εισόδου, όπως αυτό εξελίσσεται κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης, μέχρι κάποιο κριτήριο σύγκλισης (π.χ. διαδοχικές τιμές μέσου αριθμού πελατών να μη διαφέρει πάνω από 0.001)
 - Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα, μετά την σύγκλιση ανωτέρω (ερώτημα 1) σαν συνάρτηση του k για κάθε τιμή του λ
 - Οι ρυθμοί απόδοσης (throughput) στους δύο εξυπηρετητές γ_α και γ_β καθώς και ο λόγος $\gamma_\alpha/\gamma_\beta$, μετά την σύγκλιση (ερώτημα 1) σαν συνάρτηση του k για κάθε τιμή του λ
 - Σχολιάστε τα αποτελέσματα ως προς την ταχύτητα σύγκλισης και την απόδοση του συστήματος σαν συνάρτηση του k
- 9/6/2017: Ηλεκτρονική παράδοση, 20% της συνολικής βαθμολογίας
- Χρησιμοποιήσατε κάποια κλασική γλώσσα προγραμματισμού (C, C++, Java, Python) και όχι ειδική γλώσσα προσομοίωσης. Να περιληφθεί αρχείο με τον πηγαίο κώδικα (source code) και σχήμα καταστάσεων με ρυθμούς μεταβάσεων

ΔΙΚΤΥΟ ΔΥΟ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ ΕΝ ΣΕΙΡΑ (1/2)

- **Θεώρημα Burke:** Η έξοδος πελατών από ουρά $M/M/1$ ακολουθεί κατανομή Poisson με ρυθμό τον ρυθμό εισόδου λ

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

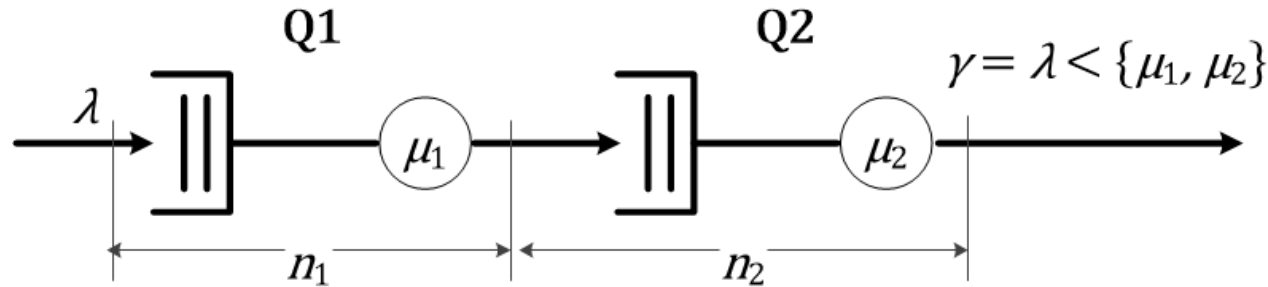
- Θεωρούμε δύο εκθετικές ουρές **Q1, Q2** (π.χ. μεταγωγείς πακέτου) με χρόνους εξυπηρέτησης **ανεξάρτητες** εκθετικές μεταβλητές με μέσους όρους $1/\mu_1, 1/\mu_2$
- Προσέγγιση με **Παραδοχή Ανεξαρτησίας Leonard Kleinrock** σε δίκτυα μεταγωγής πακέτου: Οι χρόνοι εξυπηρέτησης (ανάλογοι του μήκους πακέτου) δεν διατηρούν τα μεγέθη τους όταν προωθούνται μεταξύ συστημάτων (ουρών) εξυπηρέτησης. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης ανατίθενται σε κάθε σύστημα σαν **ανεξάρτητες** εκθετικές τυχαίες μεταβλητές
- Η είσοδος στην **Q1** είναι Poisson με ρυθμό λ (η **Q1** είναι **$M/M/1$**), $\lambda < \{\mu_1, \mu_2\}$ για εργοδικότητα (ισορροπία)
- Η κατάσταση του συστήματος περιγράφεται από το διάνυσμα $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ όπου n_1 # πελατών στην **Q1**, n_2 # πελατών στην **Q2**
- Καταστρώνουμε το διάγραμμα μεταβάσεων καταστάσεων Markov σε δύο διαστάσεις και γράφουμε τις εξισώσεις ισορροπίας
- Εξετάζουμε αν οι εργοδικές πιθανότητες έχουν **μορφή γινομένου (product form solution)**
$$P(\mathbf{n}) = P(n_1, n_2) \stackrel{?}{=} P(n_1)P(n_2) \stackrel{?}{=} (1 - \rho_1)\rho_1^{n_1}(1 - \rho_2)\rho_2^{n_2} = K\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2}$$
όπου $\rho_1 = \lambda/\mu_1$, $\rho_2 = \lambda/\mu_2$ και $K = (1 - \rho_1)(1 - \rho_2)$ η **Σταθερά Κανονικοποίησης**:
$$\sum_{\mathbf{n}} P(\mathbf{n}) = 1$$
- Οι εξισώσεις επαληθεύονται, και επομένως αποτελούν τη **μοναδική** λύση (μονοσήμαντα).
- Άρα οι δύο ουρές συμπεριφέρονται σαν **δύο ανεξάρτητες ουρές $M/M/1$** σε ισορροπία με ρυθμούς εισόδου λ και ρυθμούς εξυπηρέτησης μ_1, μ_2

Έπεται πως ο ρυθμός εξόδου της **Q1** (και εισόδου στην **Q2**) είναι Poisson με ρυθμό λ

ΔΙΚΤΥΟ ΔΥΟ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ ΕΝ ΣΕΙΡΑ (2/2)

Επαλήθευση Υπόθεσης Γινομένου

$$P(\mathbf{n}) = P(n_1, n_2) = P(n_1)P(n_2) = (1 - \rho_1)\rho_1^{n_1}(1 - \rho_2)\rho_2^{n_2} = K\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2}$$



Επαλήθευση για Αντιπροσωπευτικές Καταστάσεις:

$\mathbf{n} = (2,2)$

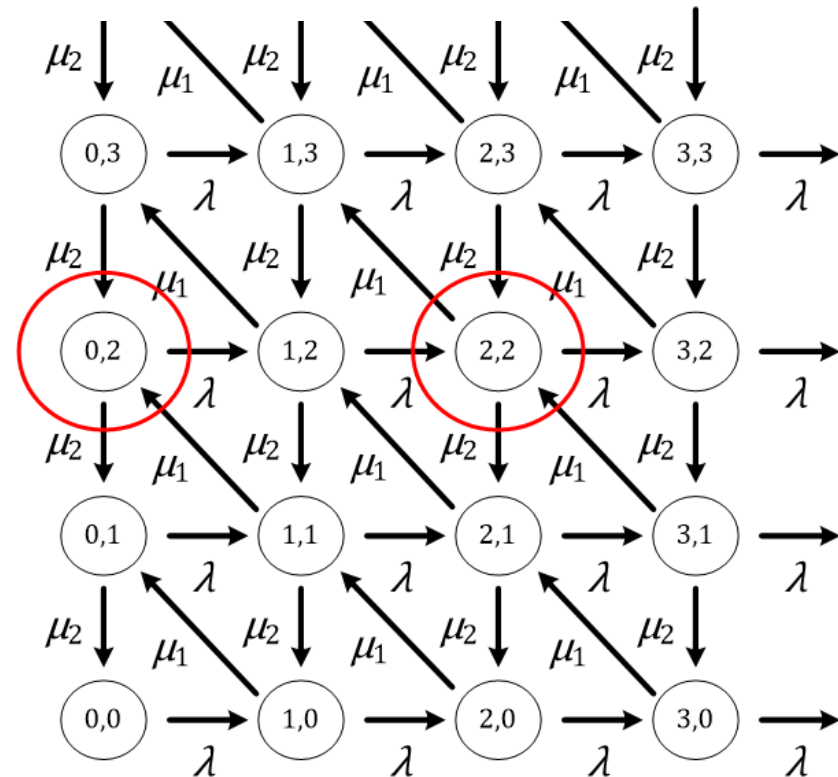
$$(\lambda + \mu_1 + \mu_2)P(2,2) = ? \lambda P(1,2) + \mu_1 P(3,1) + \mu_2 P(2,3)$$

$$(\lambda + \mu_1 + \mu_2)K(\lambda/\mu_1)^2(\lambda/\mu_2)^2 = ? \lambda K(\lambda/\mu_1)(\lambda/\mu_2)^2 + \mu_1 K(\lambda/\mu_1)^3(\lambda/\mu_2) + \mu_2 K(\lambda/\mu_1)^2(\lambda/\mu_2)^3 \quad \checkmark$$

$\mathbf{n} = (0,2)$

$$(\lambda + \mu_2)P(0,2) = ? \mu_1 P(1,1) + \mu_2 P(0,3)$$

$$(\lambda + \mu_2)K(\lambda/\mu_2)^2 = ? \mu_1 K(\lambda/\mu_1)(\lambda/\mu_2) + \mu_2 K(\lambda/\mu_2)^3 \quad \checkmark$$



ΑΝΟΙΚΤΑ ΔΙΚΤΥΑ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ (1/3)

ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ ΓΙΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΔΙΚΤΟΥ ΧΩΡΙΣ ΜΝΗΜΗ (Markov)

- Έξοδος Ουράς M/M/1 – Θεώρημα *Burke*
 - Οι αναχωρήσεις πελατών από σύστημα **M/M/1** αποτελούν διαδικασία Poisson
- Άθροιση – Διάσπαση διαδικασιών Poisson
 - Άθροιση (aggregation) ανεξαρτήτων ροών Poisson λ_1, λ_2 : Poisson με μέσο ρυθμό $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$
 - Τυχαία Διάσπαση (random split, routing) ροής Poisson μέσου ρυθμού λ με πιθανότητες $p, q = 1 - p$:
Παράγει διαδικασίες Poisson με ρυθμούς $p\lambda, (1 - p)\lambda$

ΑΝΟΙΚΤΑ ΔΙΚΤΥΑ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ (2/3)

ΘΕΩΡΗΜΑ JACKSON

Παραδοχές

- Ανοικτό δίκτυο M **δικτυακών κόμβων εξυπηρέτησης κορμού** (ουρών αναμονής) Q_i , $i = 1, 2, \dots, M$ με εκθετικούς ρυθμούς εξυπηρέτησης μ_i
- Αφίξεις πελατών (πακέτων) από εξωτερικές πηγές (sources) άμεσα συνδεδεμένες στον δικτυακό κόμβο κορμού Q_s προς εξωτερικούς προορισμούς (destinations) άμεσα συνδεδεμένους στον δικτυακό κόμβο κορμού Q_d :
Ανεξάρτητες ροές Poisson μέσου ρυθμού γ_{sd} όπου $s, d \in \{1, 2, \dots, M\}$
- Εσωτερική **δρομολόγηση** (routing) με τυχαίο τρόπο και πιθανότητα δρομολόγησης πελάτη από τον κόμβο κορμού (ουρά) Q_i στον κόμβο Q_j : r_{ij}
- Έστω $\delta_{sd}(i) = 1$ αν πελάτες (πακέτα) της ροής (s, d) διακινούνται μέσα από τον κόμβο κορμού Q_i ή αλλιώς $\delta_{sd}(i) = 0$. Τότε τον κόμβο εξυπηρέτησης Q_i διαπερνούν ροές με συνολικό μέσο ρυθμό $\lambda_i = \sum_{d=1}^M \sum_{s=1}^M \gamma_{sd} \delta_{sd}(i)$
- Οι χρόνοι εξυπηρέτησης πελατών όπως διαπερνούν το δίκτυο δεν διατηρούν την τιμή τους (έλλειψη μνήμης) αλλά αποκτούν χρόνο εξυπηρέτησης ανάλογα με την κατανομή του κάθε εξυπηρετητή (**Kleinrock's Independence Assumption**, επαληθευμένα με προσομοιώσεις σε δίκτυα με όχι απλοϊκή τοπολογία)

ΑΝΟΙΚΤΑ ΔΙΚΤΥΑ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ (3/3)

ΘΕΩΡΗΜΑ JACKSON

Αποτέλεσμα

- Κατάσταση του δικτύου: Διάνυσμα $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_M)$ αριθμού πελατών n_i στις ουρές (κόμβους κορμού) Q_i
- Η **Εργοδική Πιθανότητα** των καταστάσεων $\mathbf{n}$ (αν υπάρχει) έχει μορφή γινομένου (product form) **ανεξαρτήτων ουρών M/M/1**
$$P(\mathbf{n}) = P(n_1, n_2, \dots, n_M) = P(n_1)P(n_2) \dots P(n_M)$$
$$P(n_i) = (1 - \rho_i)\rho_i^{n_i} \text{ με } \rho_i = \lambda_i/\mu_i$$

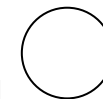
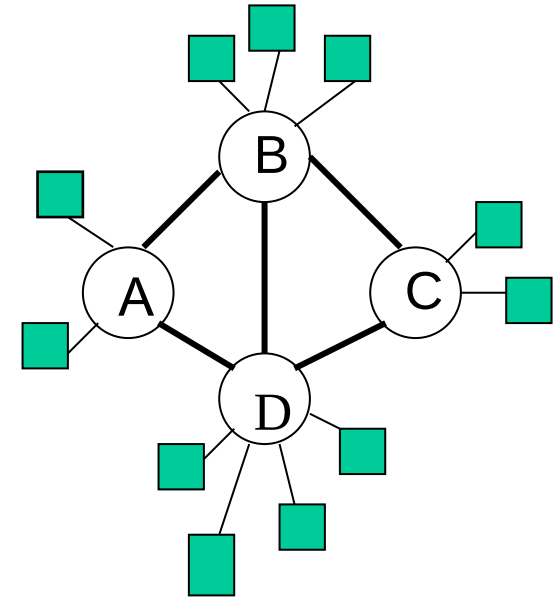
όπου λ_i ο συνολικός μέσος ρυθμός (**Poisson**) των πελατών που διαπερνούν τον κόμβο κορμού (ουρά) Q_i με ρυθμό εκθετικής εξυπηρέτησης μ_i
- Ουρά (κόμβος κορμού) συμφόρησης: Η Q_i με το μέγιστο ρ_i
- Μέσος αριθμός πελατών (πακέτων) στο δίκτυο: $E(\mathbf{n}) = \sum_{i=1}^M E(n_i) = \sum_{i=1}^M \frac{\rho_i}{1-\rho_i}$
- Μέση καθυστέρηση τυχαίου πακέτου από άκρο σε άκρο: $E(T) = E(\mathbf{n})/\gamma$ (**τύπος Little**)
όπου γ ο συνολικός μέσος ρυθμός πελατών (**Poisson**) που εισέρχονται στο δίκτυο από εξωτερικές πηγές (**network throughput**) $\gamma = \sum_{s=1}^M \sum_{d=1}^M \gamma_{sd}$
- Μέση καθυστέρηση τυχαίου πακέτου από κόμβο s σε κόμβο d : $E(T_{sd}) = \sum_{i=1}^M \delta_{sd}(i) \frac{1/\mu_i}{1-\rho_i}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: ΔΙΚΤΥΟ ΜΕΤΑΓΩΓΗΣ ΠΑΚΕΤΩΝ (1/2)

(Internet – Intranet)

- Θεωρήστε ένα δίκτυο μεταγωγής πακέτων.
 - Όλες οι γραμμές (FDX) θεωρούνται χωρητικότητας $C_i = C = 10 \text{ Gbits/sec}$. Το μέσο μήκος του πακέτου είναι $E(L) = 1000 \text{ bits}$ (θεωρείστε εκθετική κατανομή).
 - Μεταξύ κόμβων θεωρείστε προσφερόμενους ρυθμούς πακέτων Poisson, με ίσους ρυθμούς $r \text{ packets/sec}$ (από άκρο σε άκρο).
 - Πακέτα από το A στο C και αντίστροφα δρομολογούνται εξίσου στους δύο ισότιμους δρόμους: (A-B-C) και (A-D-C). Τα πακέτα μεταξύ κόμβων κατευθείαν συνδεδεμένων (A-B), (A-D), (B-D), (B-C), (D-C) δρομολογούνται κατευθείαν.
- (A) Βρείτε το ρυθμό r ώστε η γραμμή συμφόρησης (με τη μέγιστη χρησιμοποίηση) να είναι 50%
- (B) Με το r του (A) βρείτε τη μέση καθυστέρηση ενός τυχαίου πακέτου στο δίκτυο (από άκρο σε άκρο)

ΟΔΗΓΙΑ: Οι FDX γραμμές του δικτύου κορμού αναλύονται σε δύο ουρές με ροές πακέτων συνολικού μέσου ρυθμού λ_i (προκύπτει από την δρομολόγηση πακέτων) και μέσου ρυθμού εκθετικής εξυπηρέτησης $\mu_i = C_i/E(L)$. Το ανοικτό δίκτυο ουρών (**επόμενη διαφάνεια**) αναλύεται σαν **δίκτυο ανεξαρτήτων ουρών M/M/1** με το **Θεώρημα του Jackson**

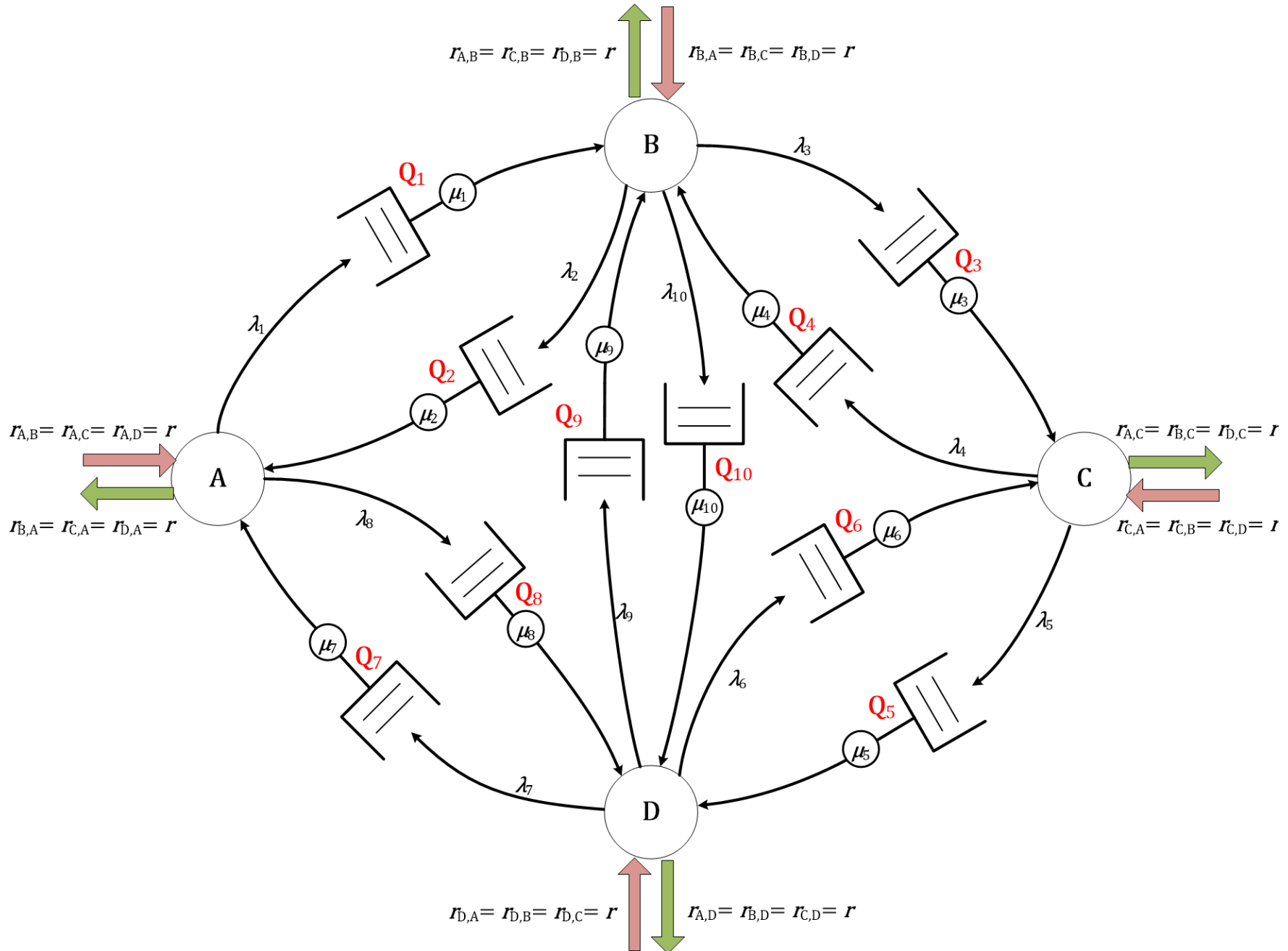


Κόμβος Δικτύου Κορμού
(Δρομολογητής Κορμού,
Backbone Router, Packet
Switch)



Κόμβος Εισόδου
(H/Y, Access Node,
Customer Network - LAN)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: ΔΙΚΤΥΟ ΜΕΤΑΓΩΓΗΣ ΠΑΚΕΤΩΝ (2/2)



8^ο Μάθημα

Εφαρμογές Θεωρήματος Jackson:

- (i) Δίκτυα Μεταγωγής Πακέτου**
- (ii) Υπολογιστικά Μοντέλα Πολυεπεξεργασίας**

ΑΝΟΙΚΤΑ ΔΙΚΤΥΑ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ (Επανάληψη)

ΘΕΩΡΗΜΑ JACKSON

Παραδοχές

- Ανοικτό δίκτυο M **δικτυακών κόμβων εξυπηρέτησης κορμού** (ουρών αναμονής) Q_i , $i = 1, 2, \dots, M$ με εκθετικούς ρυθμούς εξυπηρέτησης μ_i
- Αφίξεις πελατών (πακέτων) από εξωτερικές πηγές (sources) άμεσα συνδεδεμένες στον δικτυακό κόμβο κορμού Q_s προς εξωτερικούς προορισμούς (destinations) άμεσα συνδεδεμένους στον δικτυακό κόμβο κορμού Q_d :
Ανεξάρτητες ροές Poisson μέσου ρυθμού γ_{sd} όπου $s, d \in \{1, 2, \dots, M\}$
- Εσωτερική **δρομολόγηση** (routing) με τυχαίο τρόπο και πιθανότητα δρομολόγησης πελάτη από τον κόμβο κορμού (ουρά) Q_i στον κόμβο Q_j : r_{ij}
- Έστω $\delta_{sd}(i) = 1$ αν πελάτες (πακέτα) της ροής (s, d) διακινούνται μέσα από τον κόμβο κορμού Q_i ή αλλιώς $\delta_{sd}(i) = 0$. Τότε τον κόμβο εξυπηρέτησης Q_i διαπερνούν ροές με συνολικό μέσο ρυθμό $\lambda_i = \sum_{d=1}^M \sum_{s=1}^M \gamma_{sd} \delta_{sd}(i)$
- Οι χρόνοι εξυπηρέτησης πελατών όπως διαπερνούν το δίκτυο δεν διατηρούν την τιμή τους (έλλειψη μνήμης) αλλά αποκτούν χρόνο εξυπηρέτησης ανάλογα με την κατανομή του κάθε εξυπηρετητή (**Kleinrock's Independence Assumption**, επαληθευμένα με προσομοιώσεις σε δίκτυα με όχι απλοϊκή τοπολογία)

ΑΝΟΙΚΤΑ ΔΙΚΤΥΑ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ (Επανάληψη)

ΘΕΩΡΗΜΑ JACKSON

Αποτέλεσμα

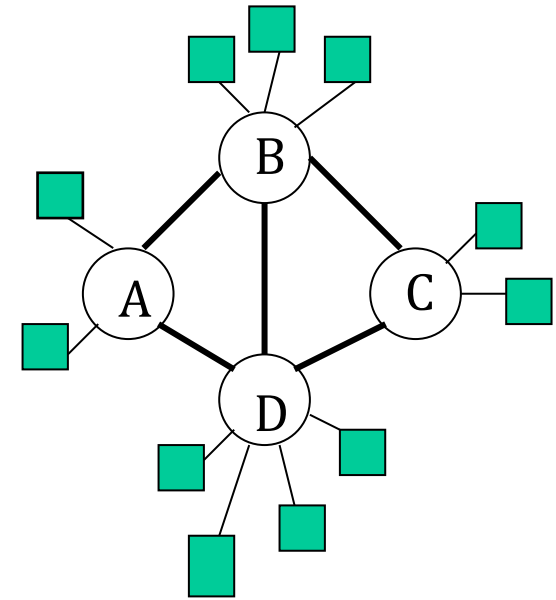
- Κατάσταση του δικτύου: Διάνυσμα $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_M)$ αριθμού πελατών n_i στις ουρές (κόμβους κορμού) Q_i
- Η **Εργοδική Πιθανότητα** των καταστάσεων $\mathbf{n}$ (αν υπάρχει) έχει μορφή γινομένου (product form) **ανεξαρτήτων ουρών M/M/1**
$$P(\mathbf{n}) = P(n_1, n_2, \dots, n_M) = P(n_1)P(n_2) \dots P(n_M)$$
$$P(n_i) = (1 - \rho_i)\rho_i^{n_i} \text{ με } \rho_i = \lambda_i / \mu_i$$

όπου λ_i ο συνολικός μέσος ρυθμός (**Poisson**) των πελατών που διαπερνούν τον κόμβο κορμού (ουρά) Q_i με ρυθμό εκθετικής εξυπηρέτησης μ_i
- Ουρά (κόμβος κορμού) συμφόρησης: Η Q_i με το μέγιστο ρ_i
- Μέσος αριθμός πελατών (πακέτων) στο δίκτυο: $E(\mathbf{n}) = \sum_{i=1}^M E(n_i) = \sum_{i=1}^M \frac{\rho_i}{1 - \rho_i}$
- Μέση καθυστέρηση τυχαίου πακέτου από άκρο σε άκρο: $E(T) = E(\mathbf{n}) / \gamma$ (**τύπος Little**)
όπου γ ο συνολικός μέσος ρυθμός πελατών (**Poisson**) που εισέρχονται στο δίκτυο από εξωτερικές πηγές (**network throughput**) $\gamma = \sum_{s=1}^M \sum_{d=1}^M \gamma_{sd}$
- Μέση καθυστέρηση τυχαίου πακέτου από κόμβο s σε κόμβο d : $E(T_{sd}) = \sum_{i=1}^M \delta_{sd}(i) \frac{1/\mu_i}{1 - \rho_i}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: ΔΙΚΤΥΟ ΜΕΤΑΓΩΓΗΣ ΠΑΚΕΤΟΥ (1/4)

- Θεωρούμε ένα δίκτυο μεταγωγής πακέτων (**Internet – Intranet**) 4 κόμβων (**routers**) κορμού όπως στο σχήμα
 - Όλες οι γραμμές κορμού (FDX) θεωρούνται χωρητικότητας $C_i = C = 10 \text{ Gbits/sec}$. Τα πακέτα έχουν μήκος L εκθετικά κατανομημένο με μέση τιμή $E(L) = 1000 \text{ bits}$ (θεωρείστε εκθετική κατανομή)
 - Μεταξύ κόμβων πηγής και προορισμού τα πακέτα προσφέρονται σε ροές Poisson με ίσους συνολικούς ρυθμούς r packets/sec (από άκρο σε άκρο μεταξύ κόμβων κορμού, σύνολο 3×4 ροές)
 - Πακέτα από το A στο C και αντίστροφα δρομολογούνται με τυχαία δρομολόγηση p , $(1 - p)$ στους δύο ισότιμους δρόμους: $(A - B - C)$ και $(A - D - C)$. Θεωρούμε πως $p = 0.5$
 - Πακέτα μεταξύ κόμβων κορμού κατευθείαν συνδεδεμένων $(A - B)$, $(A - D)$, $(B - D)$, $(B - C)$, $(D - C)$ δρομολογούνται κατευθείαν
- (1) Ζητείται ο ρυθμός των 12 ροών r ώστε η γραμμή συμφόρησης (με τη μέγιστη χρησιμοποίηση) να είναι 50%
- (2) Με το r του (1) ζητείται η μέση καθυστέρηση από άκρο σε άκρο στο δίκτυο κορμού ενός τυχαίου πακέτου

ΟΔΗΓΙΑ: Οι FDX γραμμές του δικτύου κορμού αναλύονται σε δύο ουρές με ροές πακέτων συνολικού μέσου ρυθμού λ_i (προκύπτει από την δρομολόγηση πακέτων) και μέσου ρυθμού εκθετικής εξυπηρέτησης $\mu_i = C_i/E(L)$. Το ανοικτό δίκτυο ουρών (**επόμενη διαφάνεια**) αναλύεται σαν **δίκτυο ανεξαρτήτων ουρών M/M/1** με το **Θεώρημα του Jackson**

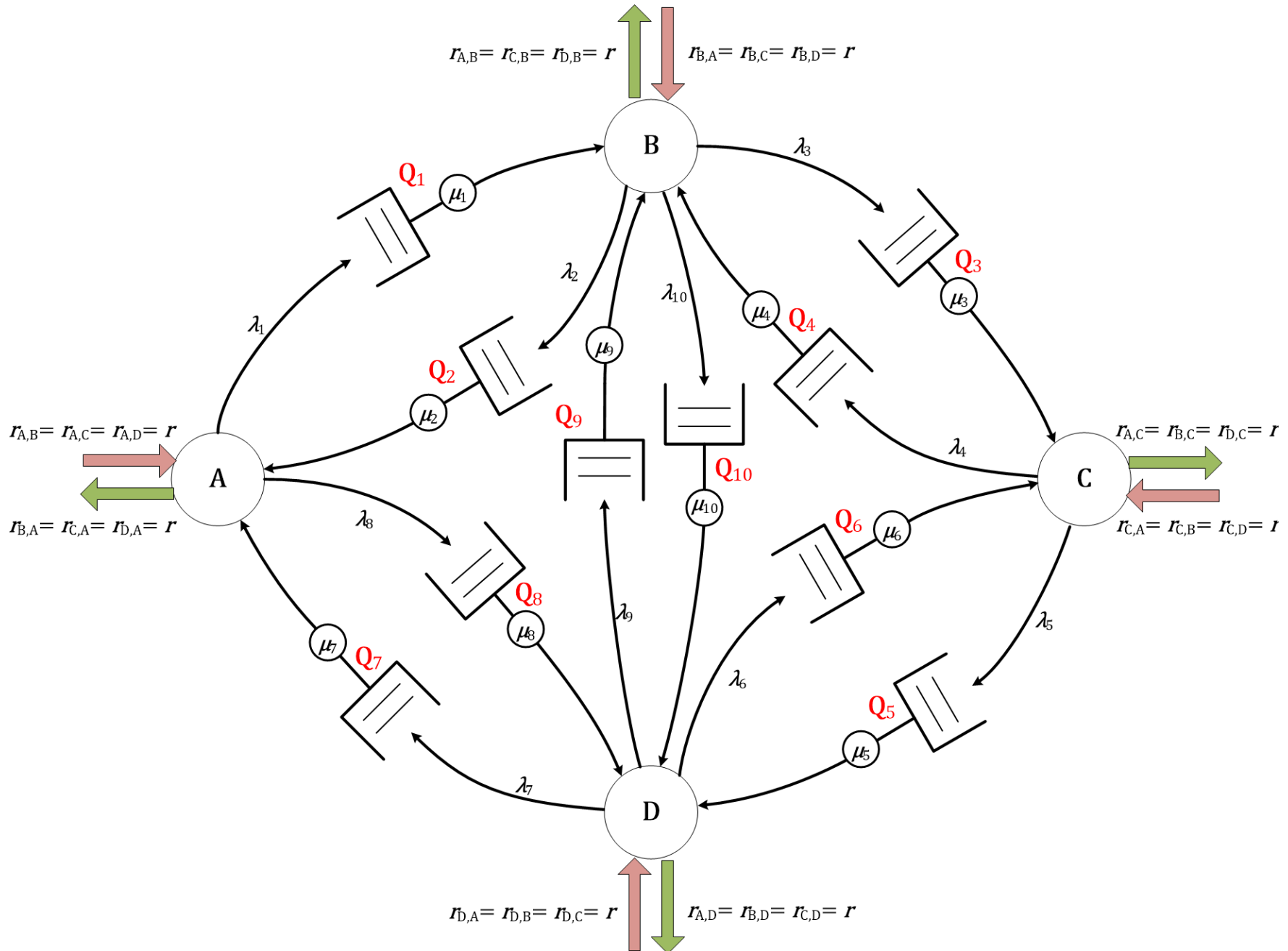


Κόμβος Δικτύου Κορμού
(Δρομολογητής Κορμού,
Backbone Router, Packet
Switch)



Κόμβος Εισόδου
(H/Y, Access Node,
Customer Network - LAN)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: ΔΙΚΤΥΟ ΜΕΤΑΓΩΓΗΣ ΠΑΚΕΤΟΥ (2/4)



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 (3/4)

Απάντηση στο Ερώτημα (1)

Με πιθανότητα διαχωρισμού $p = 0.5$, οι ρυθμοί λ_i (packets/sec) στις 10 ανεξάρτητες (M/M/1) ουρές $Q_1, Q_2, \dots, Q_{10}$ (**κατευθυντικές συνδέσεις/γραμμές μεταξύ κόμβων κορμού του δικτύου**) είναι:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= r_{A,B} + pr_{A,C} = 1.5r, \lambda_2 = r_{B,A} + pr_{C,A} = 1.5r \\ \lambda_3 &= r_{B,C} + pr_{A,C} = 1.5r, \lambda_4 = r_{C,B} + pr_{C,A} = 1.5r \\ \lambda_5 &= r_{C,D} + (1-p)r_{A,C} = 1.5r, \lambda_6 = r_{D,C} + (1-p)r_{C,A} = 1.5r \\ \lambda_7 &= r_{D,A} + (1-p)r_{C,A} = 1.5r, \lambda_8 = r_{A,D} + (1-p)r_{A,C} = 1.5r \\ \lambda_9 &= r_{D,B} = r, \lambda_{10} = r_{B,D} = r\end{aligned}$$

Οι ρυθμοί εξυπηρέτησης μ_i (packets/sec) και οι εντάσεις φορτίου $\rho_i = \lambda_i / \mu_i$ (Erlangs) είναι:

$$\begin{aligned}\mu_i &= C/E(L) = (10 \times 10^9) / 10^3 = 10^7 \text{ packets/sec} \\ \rho_1 &= \rho_2 = \dots = \rho_8 = 1.5r \times 10^{-7}, \rho_9 = \rho_{10} = r \times 10^{-7} \text{ Erlangs}\end{aligned}$$

Οι **γραμμές συμφόρησης** είναι οι αμφίδρομες γραμμές διασύνδεσης μεταξύ των κόμβων A – B, B – C, C – D, D – A με $\rho_i = 1.5r \times 10^{-7}$ Erlangs

Άρα για να έχουν οι γραμμές συμφόρησης ένταση φορτίου 0.5 Erlangs πρέπει οι ρυθμοί ροών πακέτων r να ικανοποιούν τη σχέση $1.5r \times 10^{-7} = 0.5 \Rightarrow r = 10^7 / 3$ πακέτα/sec
οπότε $\rho_1 = \dots = \rho_8 = 1/2$ Erlangs (**γραμμές συμφόρησης**) και $\rho_9 = \rho_{10} = 1/3$ Erlangs

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 (4/4)

Απάντηση στο Ερώτημα (2)

Το συνολικό προσφερόμενο φορτίο από άκρο σε άκρο γ είναι:

$$\gamma = r_{A,B} + r_{A,C} + r_{A,D} + r_{B,A} + r_{B,C} + r_{B,D} + r_{C,A} + r_{C,B} + r_{C,D} + r_{D,A} + r_{D,B} + r_{D,C} \Rightarrow \\ \gamma = 12r = 4 \times 10^7 \text{ packets/sec}$$

Ο μέσος αριθμός πακέτων στα συστήματα $Q_1, \dots, Q_{10}$ δίνονται από $E(n_i) = \rho_i / (1 - \rho_i)$:

$$E(n_1) = \dots = E(n_8) = 1, \quad E(n_9) = E(n_{10}) = 0.5 \text{ packets}$$

$$\text{και } E(\mathbf{n}) = \sum_{i=1}^{10} E(n_i) = 8 \times 1 + 2 \times 0.5 = 9 \text{ packets}$$

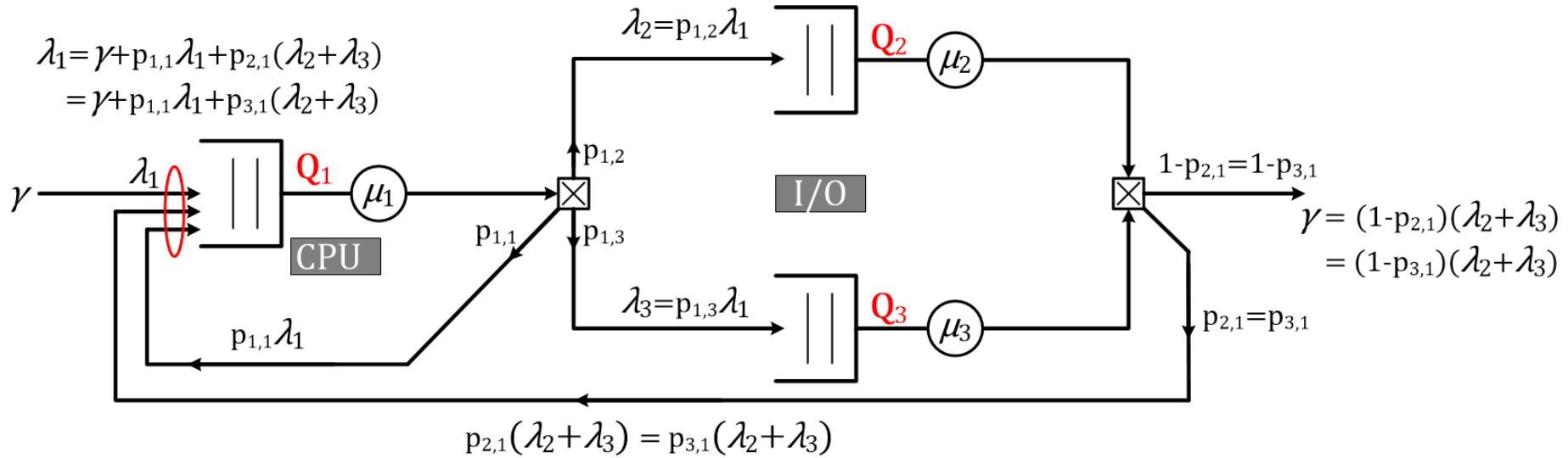
Η μέση καθυστέρηση τυχαίου πακέτου από άκρο σε άκρο είναι από τον τύπο του **Little**:

$$E(T) = E(\mathbf{n}) / \gamma = 9 / (4 \times 10^7) \text{ sec}$$

Η μέση καθυστέρηση τυχαίου πακέτου από το κόμβο A στο κόμβο C δίνεται από:

$$E(T_{A,C}) = p\{E(T_{A,B}) + E(T_{B,C})\} + (1-p)\{E(T_{A,D}) + E(T_{D,C})\} = \\ p\{1/(\mu_1 - \lambda_1) + 1/(\mu_3 - \lambda_3)\} + (1-p)\{1/(\mu_8 - \lambda_8) + 1/(\mu_6 - \lambda_6)\} = 4/10^7 \text{ sec}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ (1/3)



Θεωρείστε υπολογιστικό σύστημα που εξυπηρετεί κατά μέσο όρο γ εντολές/sec που υποβάλλονται σαν διαδικασία Poisson. Το σύστημα αποτελείται από μια CPU που εξυπηρετεί την εντολή επιμερισμένη σε τμήματα (quanta ή time-slices) και υποσύστημα I/O (δύο δίσκοι) που εξυπηρετεί επαναλαμβανόμενες ενδιάμεσες κλήσεις σχετικές με την εντολή (π.χ. για ανταλλαγή δεδομένων και αναζήτηση υποπρογραμμάτων), ενώ μεσολαβεί για την τελική έξοδο - απάντηση

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ (2/3)

- Κάθε εντολή εξυπηρετείται από την CPU του συστήματος, επιμερισμένη σε N_{CPU} τμήματα (quanta ή time-slices) την εξυπηρέτηση των οποίων ακολουθεί κλήση I/O (ενδιάμεση ή τελική). Το υποσύστημα εξυπηρέτησης CPU αναπαρίσταται σαν ουρά αναμονής Q_1 με εκθετική εξυπηρέτηση ρυθμού μ_1 quanta/sec

- Η τυχαία μεταβλητή N_{CPU} έχει μέσο όρο $E(N_{CPU})$ quanta και αναπαρίσταται σαν ανάδραση στο υποσύστημα CPU με τυχαία πιθανότητα $p_{1,1}$

$$E(N_{CPU}) = (1 - p_{1,1}) + 2p_{1,1}(1 - p_{1,1}) + 3p_{1,1}^2(1 - p_{1,1}) + 4p_{1,1}^3(1 - p_{1,1}) + \dots = 1/(1 - p_{1,1})$$

$$\text{ή}$$
$$p_{1,1} = \frac{E(N_{CPU}) - 1}{E(N_{CPU})}$$

- Την επεξεργασία των τμημάτων N_{CPU} μιας εντολής ακολουθεί κλήση I/O. Το υποσύστημα I/O αποτελείται από δύο συστήματα εξυπηρέτησης τα οποία αναπαρίστανται σαν ουρές αναμονής Q_2 και Q_3 με εκθετική εξυπηρέτηση ρυθμών μ_2 και μ_3 κλήσεις/sec. Η επιλογή Q_2 ή Q_3 γίνεται τυχαία με πιθανότητες $p_{1,2}$ και $p_{1,3}$ αντίστοιχα, $p_{1,1} + p_{1,2} + p_{1,3} = 1$

- Θεωρούμε πως κάθε εντολή παράγει κατά μέσο όρο $E(N_{I/O})$ κλήσεις οι οποίες είτε επανέρχονται στο υποσύστημα CPU με πιθανότητες $p_{2,1} = p_{3,1}$ ή ολοκληρώνεται με πιθανότητα $1 - p_{2,1} = 1 - p_{3,1}$

$$p_{2,1} = p_{3,1} = \frac{E(N_{I/O}) - 1}{E(N_{I/O})}$$

- Με $E(N_{CPU}) = 5$ quanta, $\mu_1 = 10$ quanta/sec, $E(N_{I/O}) = 3$ κλήσεις, $\mu_2 = 5$ κλήσεις/sec, $\mu_3 = 3$ κλήσεις/sec και αριθμό κλήσεων προς το Q_2 διπλάσιων κατά μέσο όρο από το Q_3 , ζητείται ο μέγιστος ρυθμός $\gamma_{\max}$ εντολών/sec που οδηγεί το σύστημα σε κορεσμό. Για $\gamma = \gamma_{\max}/2$ υπολογίστε τον μέσο χρόνο εξυπηρέτησης μιας τυχαίας εντολής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ (3/3)

Με τις παραδοχές του Θεωρήματος **Jackson** έχω το ανοικτό δίκτυο ανεξαρτήτων ουρών M/M/1 Q_1, Q_2, Q_3 με μέσους ρυθμούς εισόδου:

$$\lambda_1 = \gamma + p_{1,1}\lambda_1 + p_{2,1}(\lambda_2 + \lambda_3), \lambda_2 = p_{1,2}\lambda_1, \lambda_3 = p_{1,3}\lambda_1$$

Για τα $p_{1,1}, p_{2,1}$ και $p_{3,1}$ ισχύουν $p_{1,1} = \frac{E(N_{CPU})-1}{E(N_{CPU})}$ και $p_{2,1} = p_{3,1} = \frac{E(N_{I/O})-1}{E(N_{I/O})}$, άρα

$$p_{1,1} = 4/5, p_{2,1} = p_{3,1} = 2/3, p_{1,1} + p_{1,2} + p_{1,3} = 1 \text{ και } p_{1,2} = 2p_{1,3} \text{ άρα } p_{1,3} = 1/15, p_{1,2} = 2/15$$

$$\lambda_2 = 2\lambda_1/15, \lambda_3 = \lambda_1/15, \lambda_1 = \gamma + 4\lambda_1/5 + 2\lambda_1/(3 \times 5) \text{ άρα}$$
$$\lambda_1 = 15\gamma, \quad \lambda_2 = 2\gamma, \quad \lambda_3 = \gamma$$

Για ρυθμούς εξυπηρέτησης μ_i (πελάτες/sec) η χρησιμοποίηση $\rho_i = \lambda_i / \mu_i < 1$ Erlang είναι:

$$\rho_1 = (15/10)\gamma, \rho_2 = (2/5)\gamma, \rho_3 = 0.5\gamma$$

Το στοιχείο συμφόρησης που οδηγεί το σύστημα σε κορεσμό είναι το Q_1 για $\rho_1 = 1.5\gamma_{\max} = 1$ και άρα:

$$\gamma_{\max} = 2/3 \text{ εντολές/sec}$$

Για $\gamma = \gamma_{\max}/2 = 1/3$ εντολές/sec έχουμε:

$$\rho_1 = 1/2 \text{ Erlang}, \rho_2 = 2/15 \text{ Erlang}, \rho_3 = 1/6 \text{ Erlang και}$$
$$E(n_i) = \rho_i / (1 - \rho_i) \Rightarrow E(n_1) = 1, E(n_2) = 4/26, E(n_3) = 5/25$$
$$E(\mathbf{n}) = E(n_1) + E(n_2) + E(n_3) = 1.35 \text{ εντολές}$$

Μέση Απόκριση / Εντολή (**Average Response Time**) από τον τύπο του **Little**: $E(T) = E(\mathbf{n})/\gamma = 4.05 \text{ sec}$

9^ο Μάθημα

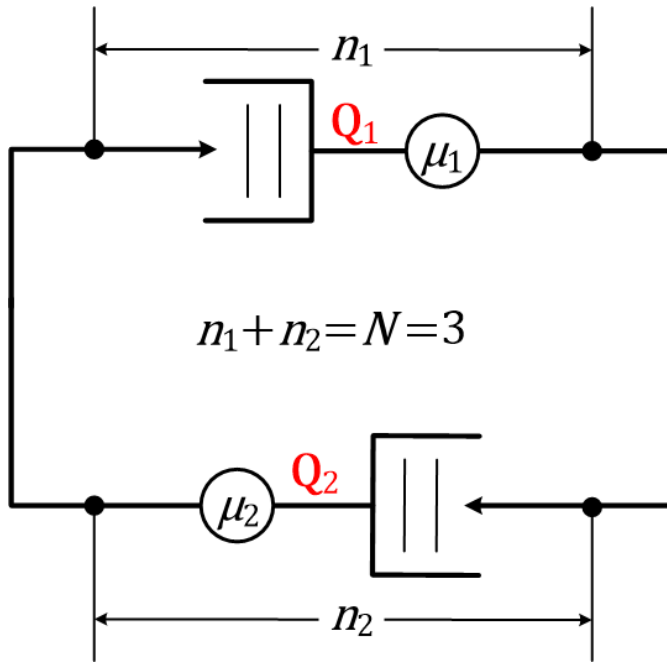
Κλειστά Δίκτυα Ουρών Markov

Θεώρημα Gordon – Newell

Αλγόριθμος Buzen

ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ ΔΥΟ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ

$M=2$ Ουρές, $N=3$ Περιφερόμενοι Πελάτες



$$n_1 + n_2 = N = 3, \quad \mu_1 / \mu_2 = \alpha$$

$$\mu_1 P(1,2) = \mu_2 P(0,3)$$

$$\mu_1 P(2,1) = \mu_2 P(1,2)$$

$$\mu_1 P(3,0) = \mu_2 P(2,1)$$

$$P(0,3) + P(1,2) + P(2,1) + P(3,0) = 1$$

$$P(0,3) = \alpha^3 / [1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3]$$

$$P(1,2) = \alpha^2 / [1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3]$$

$$P(2,1) = \alpha / [1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3]$$

$$P(3,0) = 1 / [1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3]$$

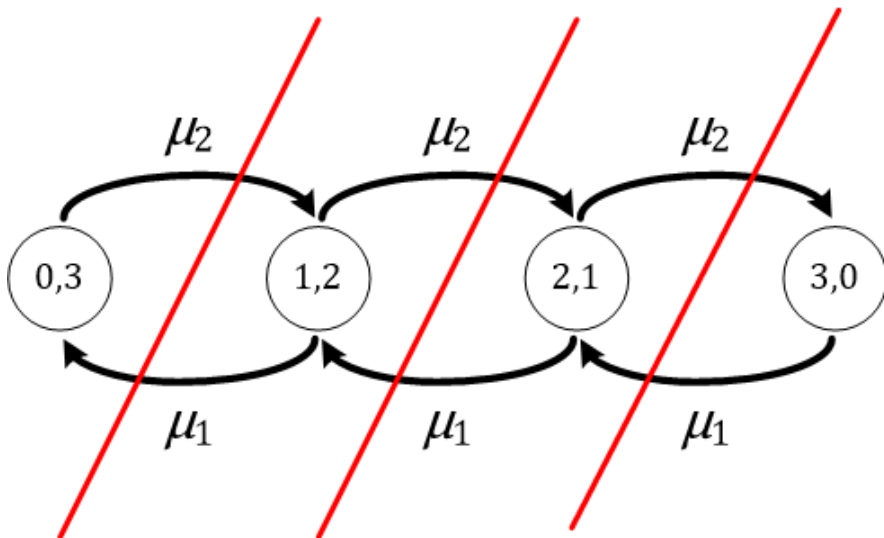
$$P(0,3)[1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3] / \alpha^3 = 1$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \mu_2 [1 - P(3,0)] = \mu_1 [1 - P(0,3)] = \\ &= \mu_2 [\alpha + \alpha^2 + \alpha^3] / [1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3] = \\ &= \mu_1 [1 + \alpha + \alpha^2] / [1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(n_1) &= P(1,2) + 2P(2,1) + 3P(3,0) = \\ &= [\alpha^2 + 2\alpha + 3] / [1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(n_2) &= P(2,1) + 2P(1,2) + 3P(0,3) = \\ &= [\alpha + 2\alpha^2 + 3\alpha^3] / [1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3] \end{aligned}$$

$$E(n_1) + E(n_2) = N = 3 \text{ πελάτες}$$



ΚΛΕΙΣΤΑ ΔΙΚΤΥΑ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ GORDON-NEWELL

ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ:

- Θεωρούμε κλειστό δίκτυο με N πελάτες και M υποσυστήματα εκθετικής εξυπηρέτησης (ουρές) $\sum_{i=1}^M n_i = N$
- Ανεξάρτητοι εκθετικοί εξυπηρετητές $i = 1, 2, \dots, M$ με ρυθμό μ_i , παραδοχή ανεξαρτησίας **Kleinrock**
- Τυχαία Δρομολόγηση από i σε j με πιθανότητα $p_{ij} = \text{Prob}\{i \rightarrow j\}$

Θεώρημα Gordon-Newell: Οι εργοδικές πιθανότητες της κατάστασης $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_M)$ έχουν μορφή γινομένου

$$P(n_1, n_2, \dots, n_M) = \frac{1}{G(N)} \prod_{i=1}^M (X_i)^{n_i}$$

Οι παράμετροι X_i είναι ανάλογες των βαθμών χρησιμοποίησης των ουρών i , κατ' αναλογία με τα $\rho_i = \lambda_i / \mu_i$ στα ανοικτά δίκτυα **Jackson**:

$$\mu_j X_j = \sum_{i=1}^M \mu_i X_i p_{ij}, \quad j = 1, \dots, N$$

Συνήθως ορίζουμε την τιμή της $X_1 = 1$ ώστε το ανωτέρω **γραμμικώς εξαρτημένο σύστημα εξισώσεων** να έχει μονοσήμαντη λύση

- Η σταθερά $G(N)$, προκύπτει από την εξίσωση **κανονικοποίησης** (άθροισμα εργοδικών πιθανοτήτων για όλες τις πιθανές απείρως επισκέψιμες καταστάσεις - positive recurrent states - ίσο με μονάδα)
- Η $G(N)$ αντιστοιχεί στη **Συνάρτηση Κερματισμού – Partition Function** της Στατιστικής Μηχανικής. Ο υπολογισμός της απαιτεί την καταγραφή όλων των καταστάσεων $(n_1, n_2, \dots, n_M)$ συνδυασμών n_i που αθροίζουν σε N (στην γενικότητα του «δύσκολο» πρόβλημα). Στην περίπτωση μας λύνεται με τον αναδρομικό αλγόριθμο του **Buzen** (επόμενη διαφάνεια)
- Οι οριακές πιθανότητες (**Marginal Probabilities**) για το υποσύστημα (ουρά) i δίνονται από:

$$P(n_i = k) = \frac{X_i^k}{G(N)} [G(N - k) - X_i G(N - k - 1)]$$

- Ο βαθμός χρησιμοποίησης του εξυπηρετητή i δίνεται από $P(n_i \geq 1) = X_i G(N - 1) / G(N)$
- Ο μέσος αριθμός πελατών στην ουρά i (μαζί με τον εξυπηρετούμενο) δίνεται από: $E[n_i] = \sum_{k=1}^N X_i^k \frac{G(N-k)}{G(N)}$

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΒΥΖΕΝ

Πολυπλοκότητα $O(N \times M)$

Αναδρομικός Υπολογισμός μέσω δισδιάστατου πίνακα $g(n, m)$, $n = 0, 1, \dots, N$ και $m = 0, 1, \dots, M$

$$g(n, m) = \sum_{n_1 + \dots + n_m = n} \prod_{i=1}^m (X_i)^{n_i}$$
$$= \sum_{(n_1 + \dots + n_m = n) \wedge (n_m = 0)}^n \prod_{i=1}^m (X_i)^{n_i} + \sum_{(n_1 + \dots + n_m = n) \wedge (n_m > 0)}^n \prod_{i=1}^m (X_i)^{n_i}$$

$$g(n, m) = g(n, m-1) + X_m g(n-1, m)$$

Αρχικές συνθήκες αναδρομικού αλγορίθμου:

$$g(0, m) = 1, \quad m = 1, \dots, M$$

$$g(n, 1) = (X_1)^n, \quad n = 0, \dots, N$$

Αν ορίσουμε $X_1 = 1$ τότε $g(n, 1) = 1$

Η συνάρτηση κερματισμού (**Partition Function**) για κλειστό δίκτυο με M ουρές και n πελάτες ($n = 0, \dots, N$) δίνεται από την τελευταία στήλη του πίνακα $g(n, m)$:

$$G(n) = g(n, M), \quad n = 1, 2, \dots, N \quad \text{και} \quad G(N) = g(N, M)$$

$$E[n_i] = \sum_{k=1}^N X_i^k \frac{G(N-k)}{G(N)}, \quad P(n_i \geq 1) = X_i G(N-1) / G(N)$$

Για τον υπολογισμό των N στοιχείων της στήλης M του πίνακα $g(n, m)$ απαιτούνται $N \times M$ προσθέσεις και $N \times M$ πολλαπλασιασμοί: Πολυπλοκότητα $O(N \times M)$

ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ ΔΥΟ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ

Θεώρημα Gordon-Newell για $M = 2$ Ουρές, $N = 3$ Πελάτες

$$X_1 \mu_1 = X_2 \mu_2$$

$$X_1 = 1, X_2 = \mu_1 / \mu_2 = \alpha$$

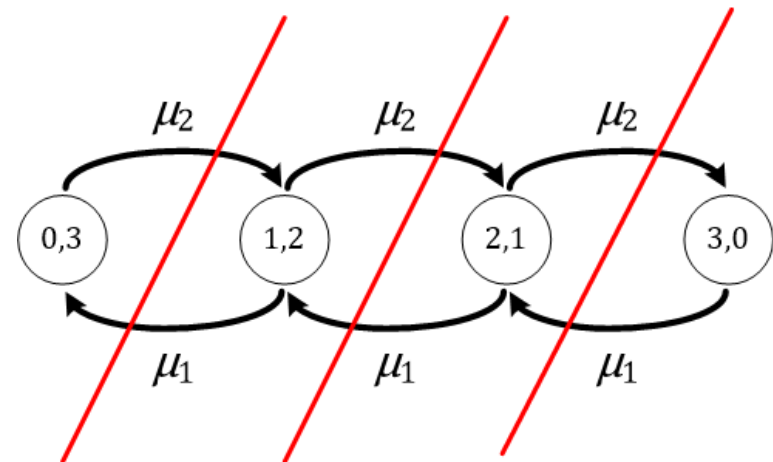
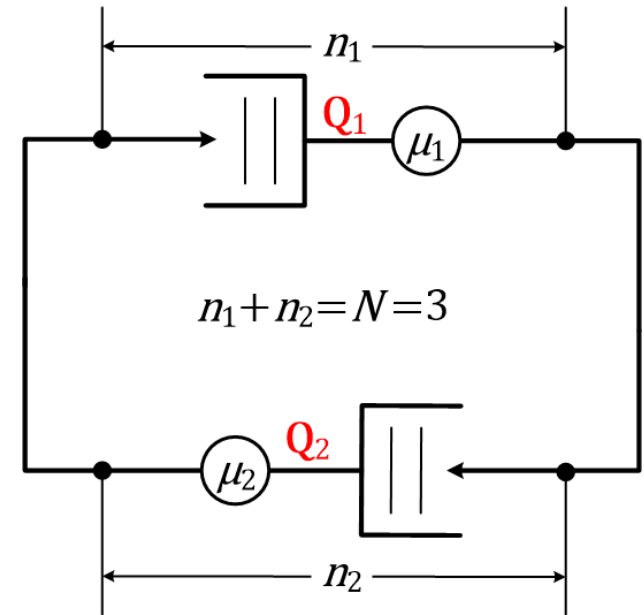
- $P(0,3) = X_2^3 / G(3) = \alpha^3 / G(3)$
- $P(1,2) = X_2^2 / G(3) = \alpha^2 / G(3)$
- $P(2,1) = X_2 / G(3) = \alpha / G(3)$
- $P(3,0) = 1 / G(3)$
- $1 / G(3) + \alpha / G(3) + \alpha^2 / G(3) + \alpha^3 / G(3) = 1$

$$\text{Άρα: } G(3) = 1 / (1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3)$$

$$\gamma = \mu_2 [1 - P(3,0)] = \mu_2 [1 - 1 / G(3)]$$

$$E(T_i) = E(n_i) / \gamma$$

- $E(n_1) = P(1,2) + 2P(2,1) + 3P(3,0) = \frac{[a^2 + 2a + 3]}{G(3)}$
- $E(n_2) = P(2,1) + 2P(1,2) + 3P(0,3) = \frac{[a + 2a^2 + 3a^3]}{G(3)}$
- $E(n_1) + E(n_2) = N = 3$



ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ ΔΥΟ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ

Αλγόριθμος Buzen για $M = 2$ Ουρές, $N = 3$ Πελάτες

Με βάση τον αναδρομικό αλγόριθμο του **Buzen**

και $X_1 = 1, X_2 = \mu_1/\mu_2 = a$ ισχύει ότι:

$$g(n, m) = g(n, m - 1) + X_m g(n - 1, m)$$

$$G(N) = g(N, M)$$

Προκύπτει :

$$G(1) = 1 + a$$

$$G(2) = 1 + a + a^2$$

$$G(3) = 1 + a + a^2 + a^3$$

Πίνακας Τιμών $g(n, m)$

n	X_1	X_2
0	1	1
1	1	$1 + a$
2	1	$1 + a + a^2$
3	1	$1 + a + a^2 + a^3$

Η χρησιμοποίηση της ουράς Q_1 είναι

$$\begin{aligned} P(n_i \geq 1) &= P(1,2) + P(2,1) + P(3,0) = 1 - P(0,3) = X_i G(N - 1) / G(N) = X_1 G(2) / G(3) = \\ &= \frac{1 + a + a^2}{1 + a + a^2 + a^3} \quad (\text{όπως και στη 2}^\eta \text{ διαφάνεια}) \end{aligned}$$

Επίσης:

$$P(0,3) = a^3 / G(3)$$

$$P(1,2) = a^2 / G(3)$$

$$P(2,1) = a / G(3)$$

$$P(3,0) = 1 / G(3)$$

$$E[n_i] = \sum_{k=1}^N X_i^k \frac{G(N - k)}{G(N)}$$

$$E(n_1) = \sum_{k=1}^3 \frac{G(3 - k)}{G(3)} = \frac{a^2 + 2a + 3}{1 + a + a^2 + a^3}$$

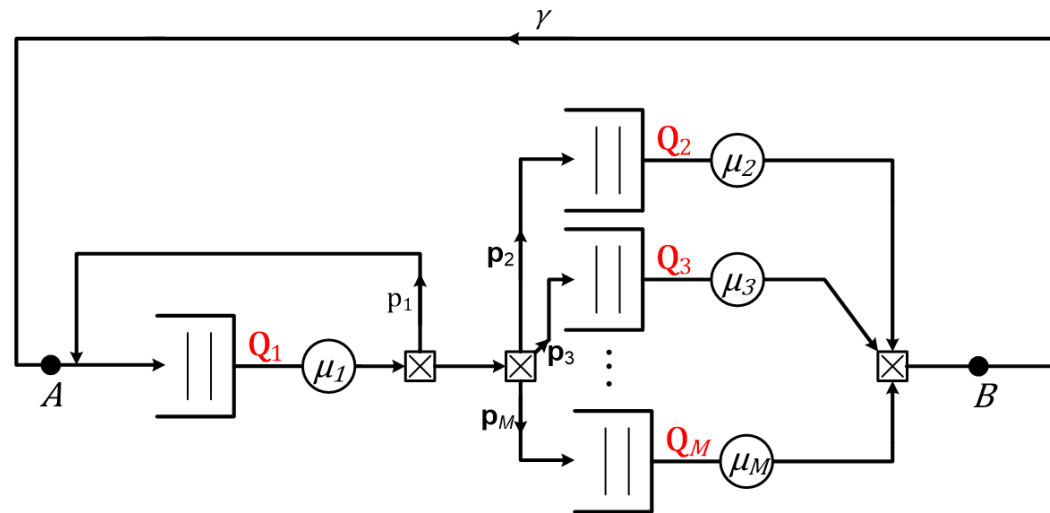
$$E(n_2) = \sum_{k=1}^3 X_2^k \frac{G(N - k)}{G(N)} = 3 - E(n_1) = \frac{a + 2a^2 + 3a^3}{1 + a + a^2 + a^3}$$

ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ (1/2)

Βασισμένο στο Παράδειγμα του *Jeffrey Buzen*, "Computational Algorithms for Closed Queuing Networks with Exponential Servers", Communications of the ACM 16 (9), Sept. 1973

Κλειστό δίκτυο M εκθετικών ουρών Q_1 (CPU), $Q_2, \dots, Q_M$ (I/O)

Παράλληλη Επεξεργασία N προγραμμάτων (εντολών) με ανακύκλωση στη CPU (πιθανότητα p_1), επιλογή υποσυστήματος I/O (με πιθανότητες $p_2, p_3, \dots, p_M$) και απάντηση – δημιουργία νέας εντολής (εξωτερική ανάδραση).



Εφαρμογή Αλγορίθμου **Buzen** για $N = 1, 2, 3, 4$ πελάτες (παράλληλα προγράμματα) και $M = 3$ ουρές Q_1, Q_2, Q_3

$$\mu_1 X_1 = p_1 \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \mu_3 X_3$$

$$\mu_2 X_2 = p_2 \mu_1 X_1$$

$$\mu_3 X_3 = p_3 \mu_1 X_1$$

$$\text{Με } \mu_1 = \frac{1}{28} \text{ msec}^{-1}, \mu_2 = \frac{1}{40} \text{ msec}^{-1}, \mu_3 = \frac{1}{280} \text{ msec}^{-1} \text{ και } X_1 = 1$$

προκύπτει πως $X_2 = 1, X_3 = 2$

Ο αναδρομικός τύπος $g(n, m) = g(n, m - 1) + X_m g(n - 1, m)$ δίνει τον πίνακα δεξιά

Οι σταθερές $G(N) = g(N, 3)$ αντιστοιχούν σε $N = 1, 2, 3, 4$ προγράμματα
 $G(1) = 4, \quad G(2) = 11, \quad G(3) = 26, \quad G(4) = 57$

Πίνακας Τιμών $g(n, m)$

n	X_1	X_2	X_3
0	1	1	1
1	1	2	4
2	1	3	11
3	1	4	26
4	1	5	57

ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ (2/2)

Βασισμένο στο Παράδειγμα του *Jeffrey Buzen*, "Computational Algorithms for Closed Queuing Networks with Exponential Servers", Communications of the ACM 16 (9), Sept. 1973

Οι αντίστοιχοι βαθμοί
χρησιμοποίησης U_1 της CPU (Q_1)
 $G(N)/G(N-1)$ είναι:

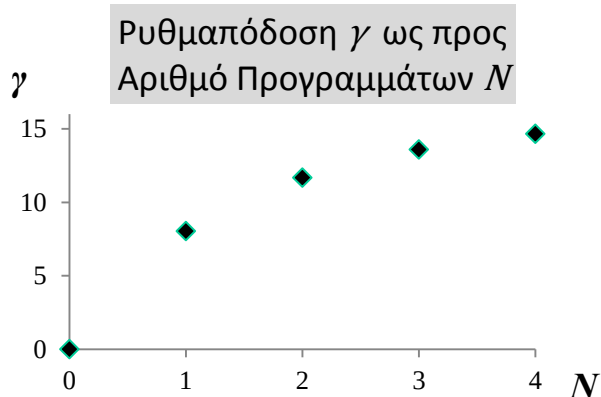
N	1	2	3	4
U_1	1/4	4/11	11/26	26/57

Η ρυθμαπόδοση του συστήματος είναι

$$\begin{aligned}\gamma &= \mu_2 p(n_2 \geq 1) + \mu_3 p(n_3 \geq 1) \\ &= \mu_2 X_2 G(N-1)/G(N) + \mu_3 X_3 G(N-1)/G(N) \\ &= (\mu_2 X_2 + \mu_3 X_3) G(N-1)/G(N)\end{aligned}$$

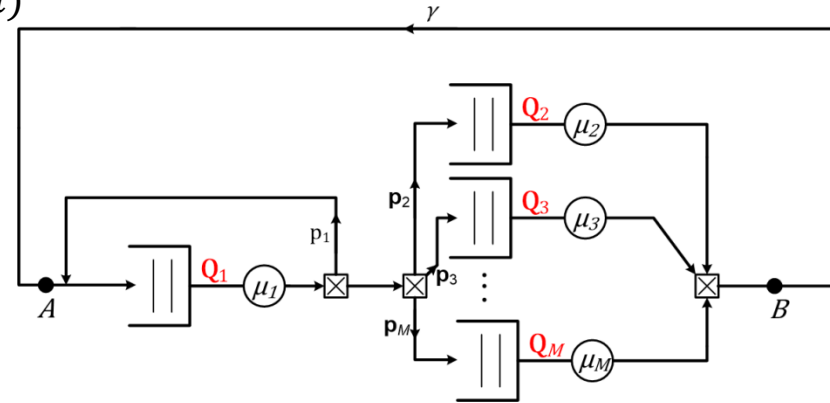
Οι αντίστοιχες τιμές σε προγράμματα/sec είναι:

N	1	2	3	4
γ	8.04	11.69	13	14.66



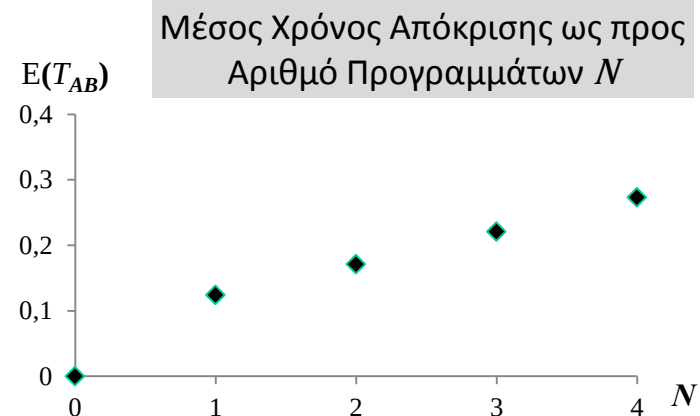
Πίνακας Τιμών $g(n, m)$

n	X_1	X_2	X_3
0	1	1	1
1	1	2	4
2	1	3	11
3	1	4	26
4	1	5	57



Ο μέσος χρόνος απόκρισης είναι $E(T_{AB}) = N/\gamma$
Οι αντίστοιχες τιμές σε sec είναι:

N	1	2	3	4
$E(T_{AB})$	0.124	0.171	0.221	0.273



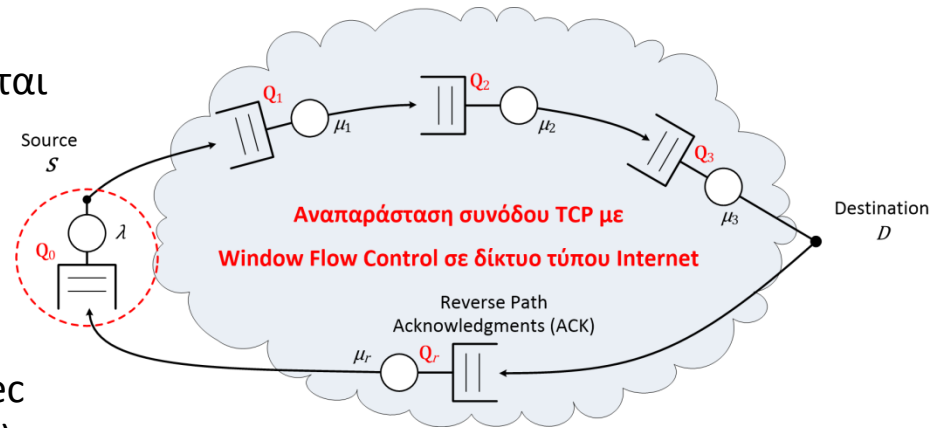
ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΑΚΡΟ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΤΟ INTERNET (1/10)

End-to-End Window Flow Control TCP Session, Μέγεθος Παραθύρου W

Αναπάρασταση Μηχανισμού Ελέγχου Ροής Παραθύρου (**Window Flow Control**) μέσω Κλειστού Δικτύου M ανεξαρτήτων εκθετικών ουρών και W πελατών. Η μορφή των πελατών εναλλάσσεται ανάμεσα σε πακέτα δεδομένων, μηνύματα επιβεβαίωσης – acknowledgments και άδειες εκπομπής – tokens

Το κλειστό δίκτυο του παραδείγματος αποτελείται από $M = 5$ υποσυστήματα:

- Q_0 : Αποθηκεύει τα Tokens στην πηγή (Source) με τον μηχανισμό Window Flow Control και αποστέλλει στον προορισμό (Destination) νέα πακέτα ανά χρονικά διαστήματα μέσης τιμής $1/\lambda$ sec (μοντέλο δημιουργίας κίνησης λ πακέτα/sec)
- Q_1, Q_2, Q_3 : Ενδιάμεσοι δικτυακοί κόμβοι μεταγωγής πακέτου με μέσους εκθετικούς ρυθμούς μ_1, μ_2, μ_3 πακέτα/sec
- Q_r : Ισοδύναμο μοντέλο καθυστέρησης για την δημιουργία και μεταβίβαση μηνυμάτων επιβεβαίωσης – ACK σαν ανεξάρτητη ουρά με μέσο εκθετικό ρυθμό μ_r πακέτα/sec (θεωρούμε κατά προσέγγιση $1/\mu_r \cong 1/\mu_1 + 1/\mu_2 + 1/\mu_3$ sec)

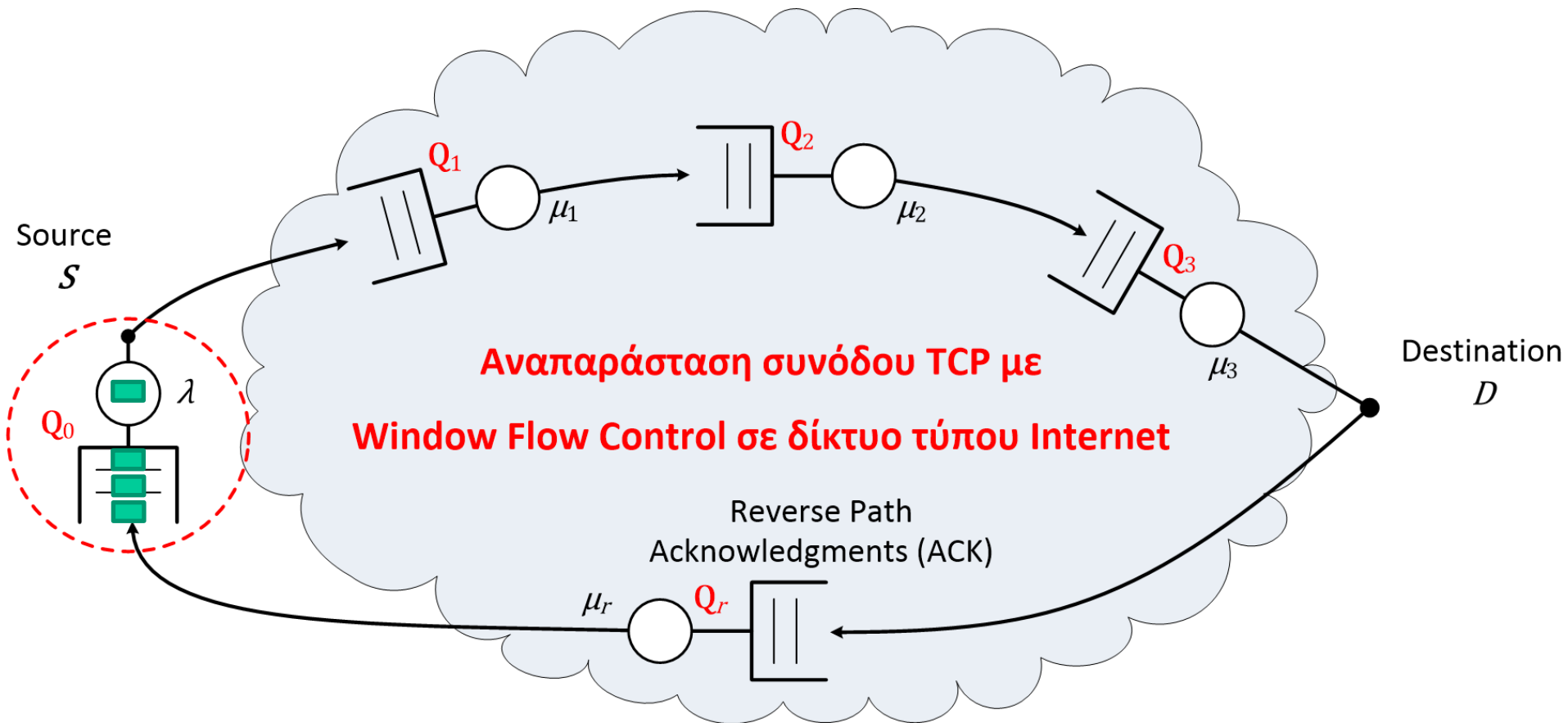


Στο κλειστό δίκτυο υπάρχουν ανά πάσα στιγμή $W \leq 8$ πελάτες που αντιστοιχούν στο μέγεθος παραθύρου – Window Size: $W = n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + n_r$

Θεωρούμε πως ισχύουν οι παραδοχές για μορφή γινομένου του θεωρήματος **Gordon – Newell** και εφαρμόζουμε τον Αλγόριθμο του **Buzen** για $W = 1, \dots, 8$ πελάτες που κυκλοφορούν σε $M = 5$ ουρές, ως προς την ρυθμαπόδοση γ και την μέση καθυστέρηση πακέτου από άκρο σε άκρο (S σε D) στο δίκτυο $E(T_{S,D}) = [E(n_1) + E(n_2) + E(n_3)]/\gamma$

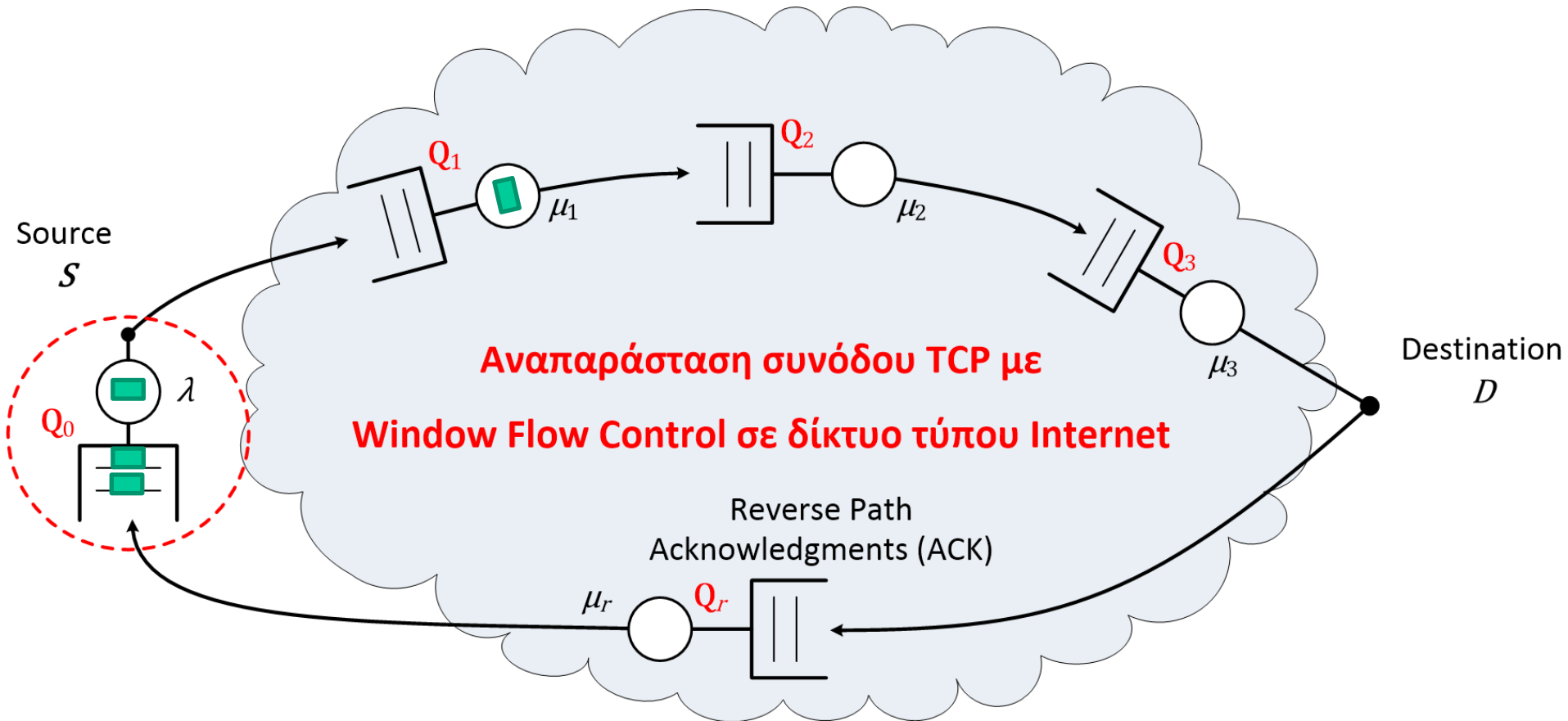
ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΑΚΡΟ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΤΟ INTERNET (2/10)

End-to-End Window Flow Control TCP Session, Μέγεθος Παραθύρου $W=4$



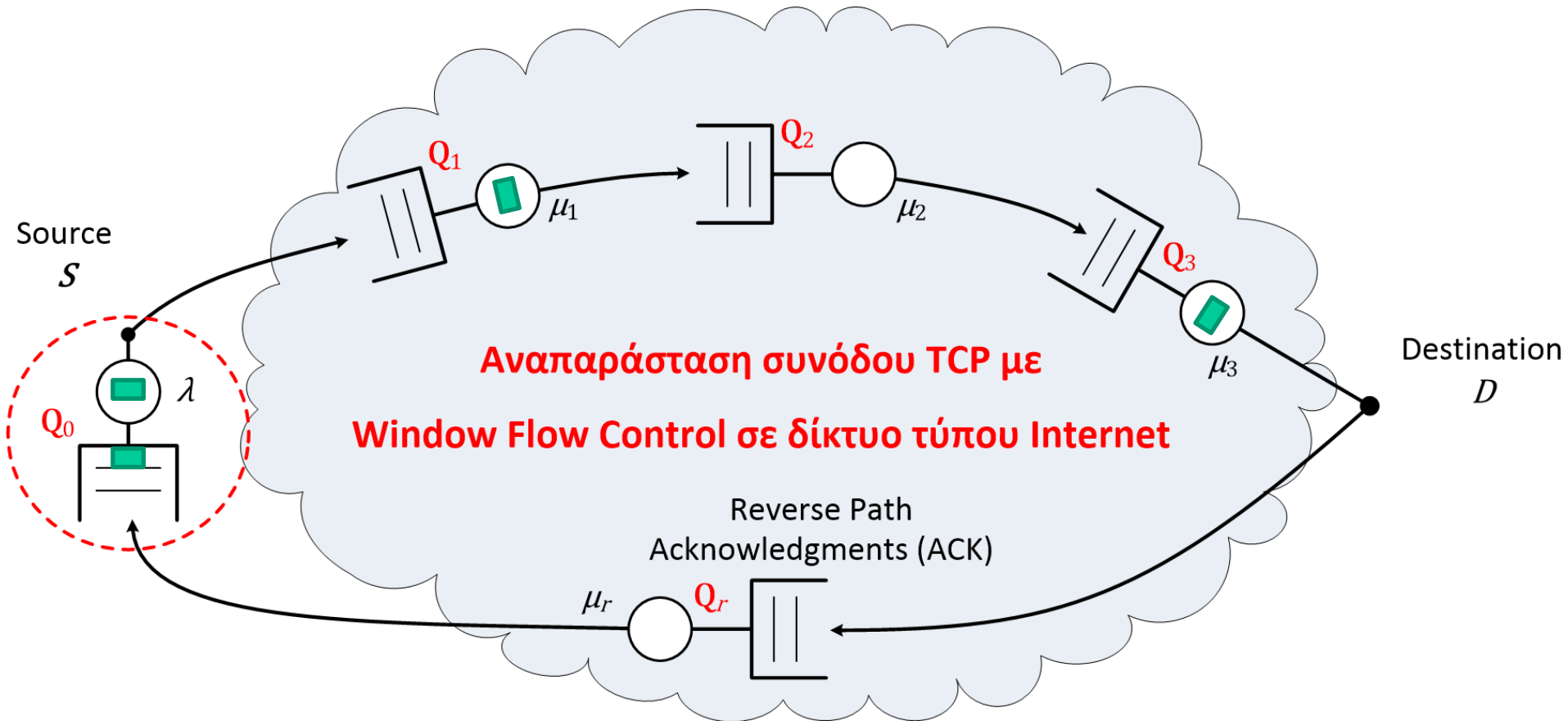
ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΑΚΡΟ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΤΟ INTERNET (3/10)

End-to-End Window Flow Control TCP Session, Μέγεθος Παραθύρου $W=4$



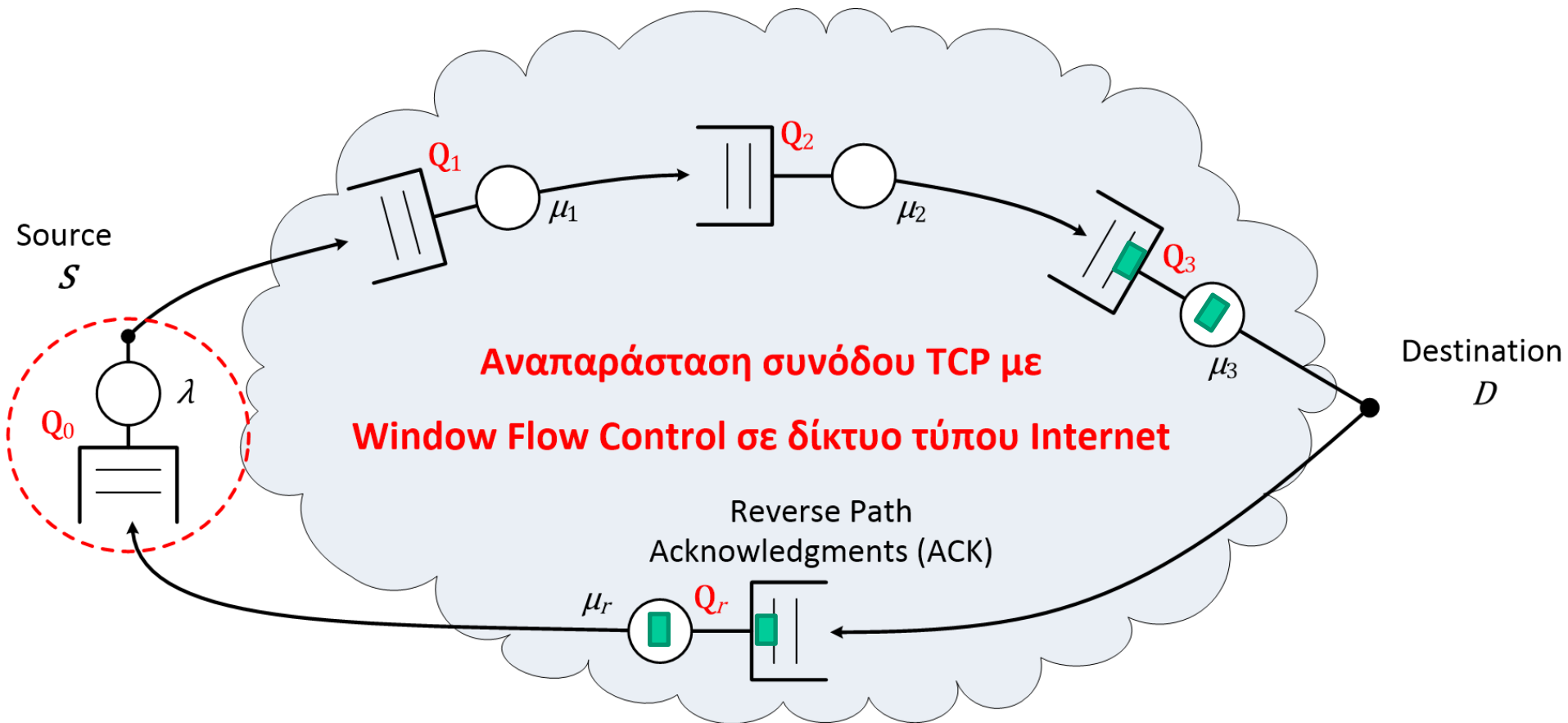
ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΑΚΡΟ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΤΟ INTERNET (4/10)

End-to-End Window Flow Control TCP Session, Μέγεθος Παραθύρου $W=4$



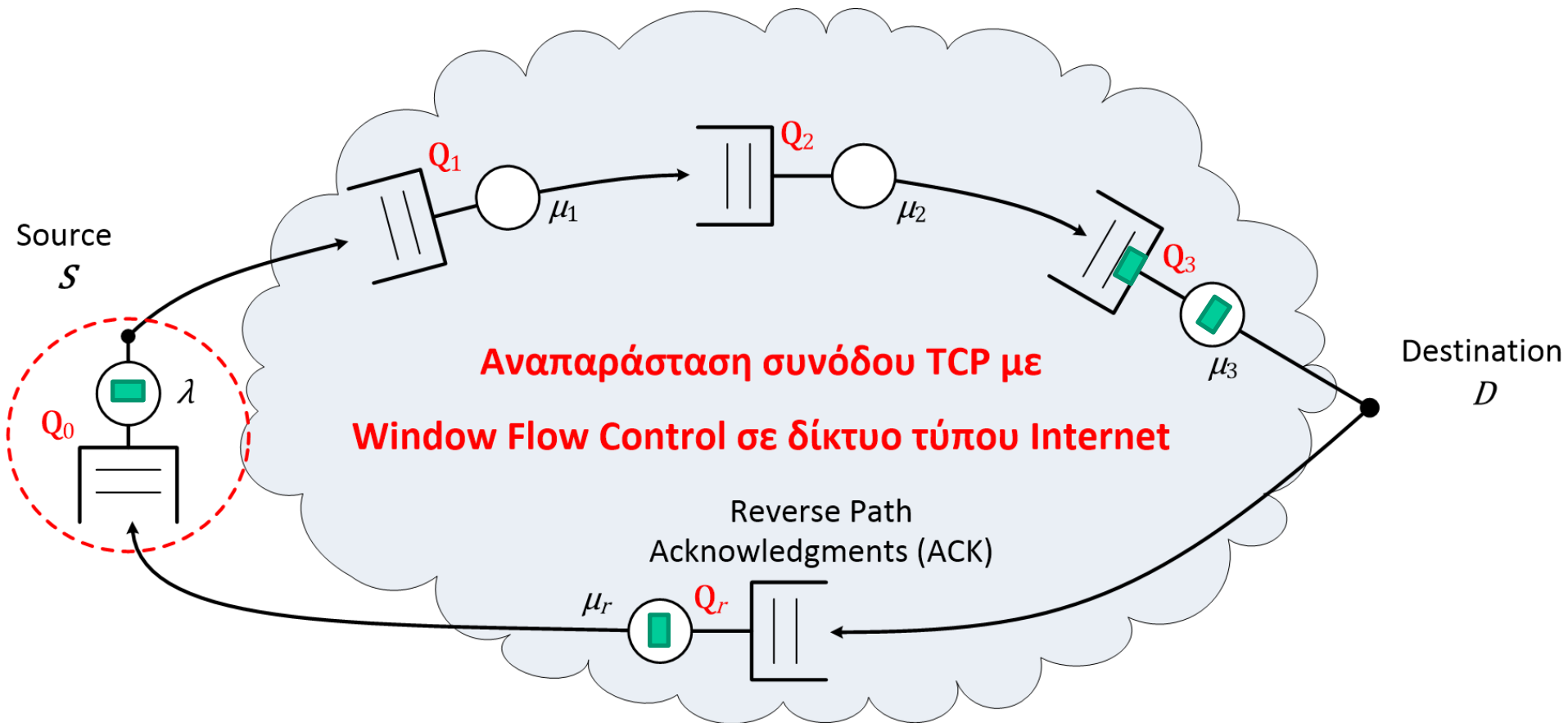
ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΑΚΡΟ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΤΟ INTERNET (5/10)

End-to-End Window Flow Control TCP Session, Μέγεθος Παραθύρου $W=4$



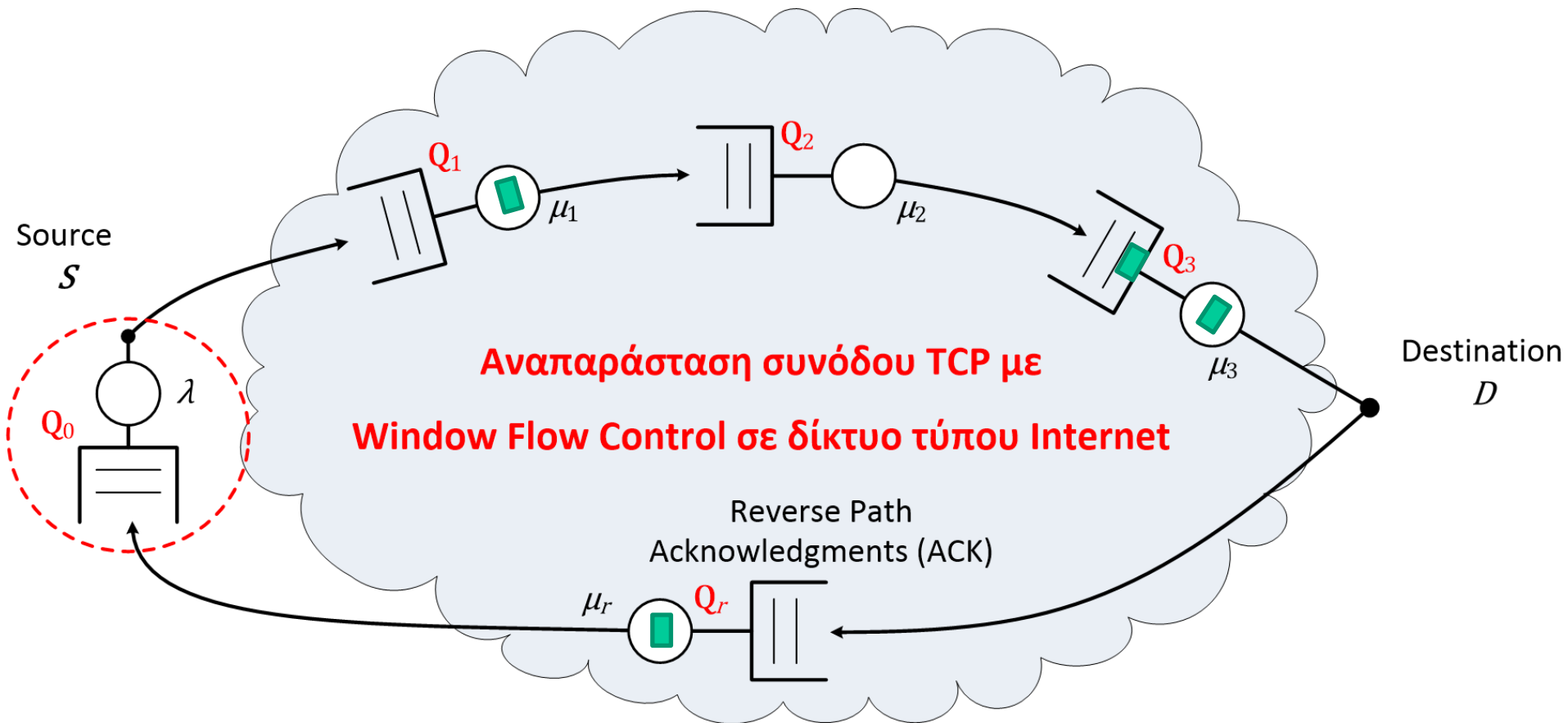
ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΑΚΡΟ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΤΟ INTERNET (6/10)

End-to-End Window Flow Control TCP Session, Μέγεθος Παραθύρου $W=4$



ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΑΚΡΟ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΤΟ INTERNET (7/10)

End-to-End Window Flow Control TCP Session, Μέγεθος Παραθύρου $W=4$



ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΑΚΡΟ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΤΟ INTERNET (8/10)

End-to-End Window Flow Control TCP Session, Μέγεθος Παραθύρου $W = 1, \dots, 8$

Υποθέτουμε πως $\lambda = 1, \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 2$ πελάτες/sec
 $\frac{1}{\mu_r} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} = \frac{3}{2}$ sec ή $\mu_r = 2/3$ πελάτες/sec

Με $X_0 = 1$ έχουμε:

$$\lambda X_0 = \mu_1 X_1 = \mu_2 X_2 = \mu_3 X_3 = \mu_r X_r$$

Άρα: $X_1 = X_2 = X_3 = 0.5, X_r = 3/2$

Ο αναδρομικός τύπος $g(n, m) = g(n, m-1) + X_m g(n-1, m)$
 δίνει τον πίνακα δεξιά

Οι σταθερές $G(W) = g(W, 5)$ αντιστοιχούν σε $W = 1, \dots, 8$

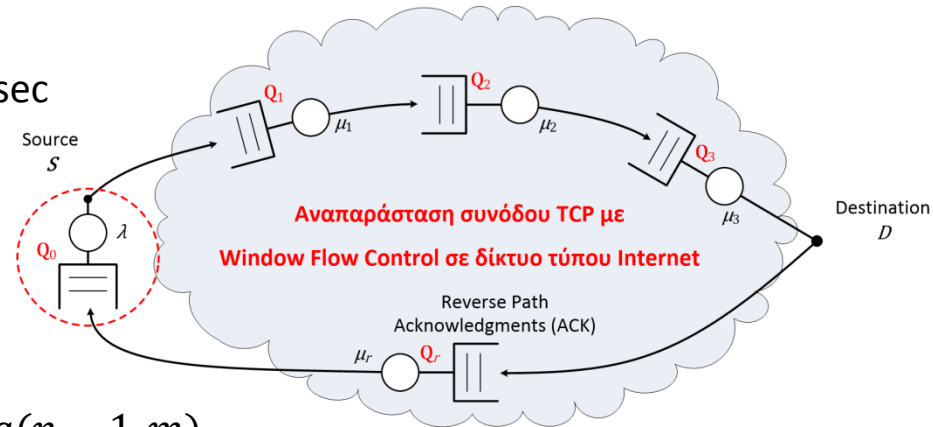
Η ρυθμαπόδοση του συστήματος γ σε πακέτα/sec είναι:

$$\gamma = \mu_1 p(n_1 \geq 1) = \mu_1 X_1 G(W-1)/G(W)$$

Η μέση καθυστέρηση πακέτων σε sec από το S στο D είναι

$$E(T_{SD}) = [E(n_1) + E(n_2) + E(n_3)]/\gamma, \text{ όπου}$$

$$E[n_i] = \sum_{k=1}^N X_i^k \frac{G(N-k)}{G(N)}$$



Πίνακας Τιμών $g(n, m)$

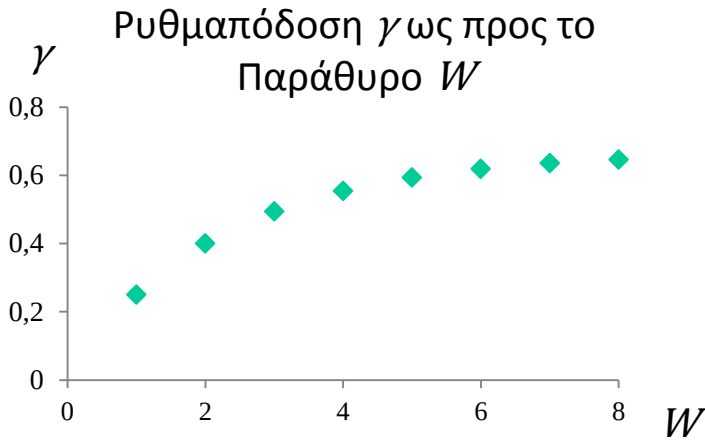
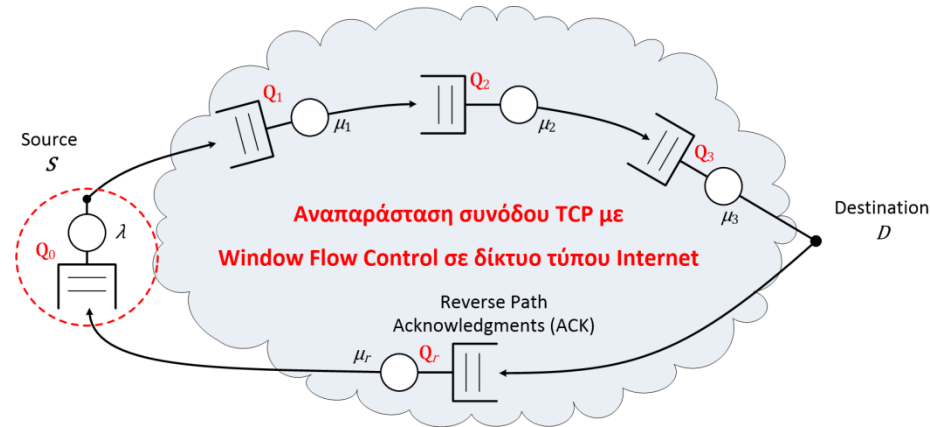
W	X_1	X_2	X_3	X_4	X_r
0	1	1	1	1	1
1	1	1.5	2	2.5	4
2	1	1.75	2.75	4	10
3	1	1.88	3.25	5.25	20.25
4	1	1.94	3.56	6.19	36.56
5	1	1.97	3.75	6.84	61.69
6	1	1.98	3.86	7.28	99.81
7	1	1.99	3.92	7.56	157.28
8	1	1.99	3.96	7.74	243.66

ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΑΚΡΟ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΤΟ INTERNET (9/10)

End-to-End Window Flow Control TCP Session, Μέγεθος Παραθύρου $W = 1, \dots, 8$

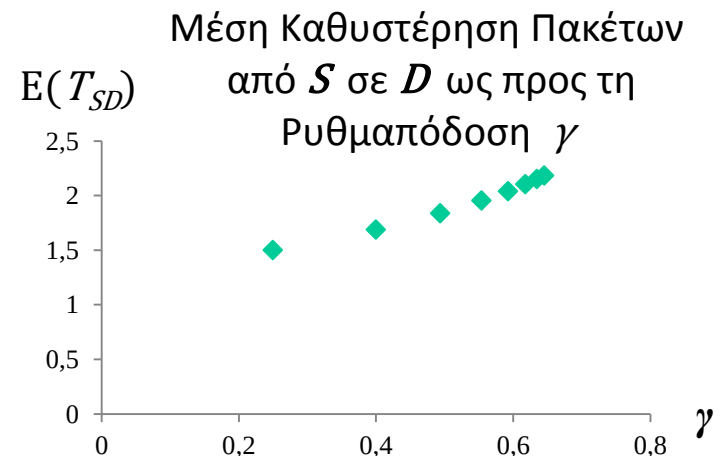
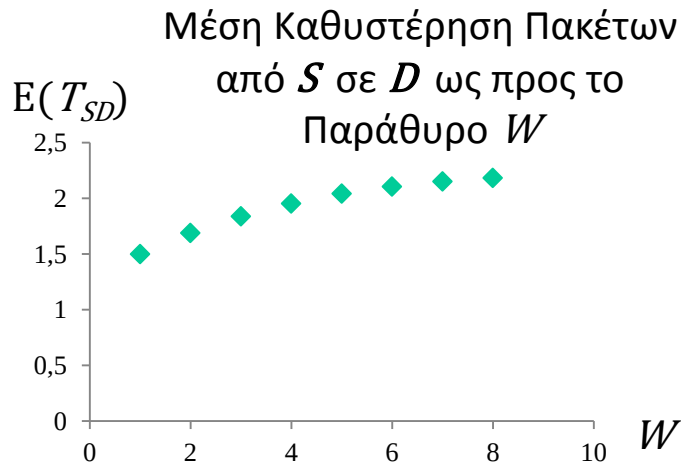
Ρυθμαπόδοση του συστήματος, $\gamma = \mu_1 p(n_1 \geq 1)$:

W	1	2	3	4	5	6	7	8
γ	0.25	0.4	0.49	0.55	0.59	0.62	0.63	0.65



Μέση καθυστέρηση πακέτου από το S στο D , $E(T_{SD})$:

W	1	2	3	4	5	6	7	8
$E(T_{SD})$	1.5	1.69	1.84	1.95	2.04	2.1	2.15	2.18



ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΑΚΡΟ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΤΟ INTERNET (10/10)

End-to-End Window Flow Control TCP Session, Μέγεθος Παραθύρου $W = 1, \dots, 8$

Σενάριο Συμφόρησης

Υποθέτουμε πως $\lambda = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1/2$ πελάτες/sec

$1/\mu_r = 1/\mu_1 + 1/\mu_2 + 1/\mu_3 = 6$ sec ή $\mu_r = 1/6$

(ανεπαρκείς ταχύτητες γραμμών $\Rightarrow$ **συμφόρηση**)

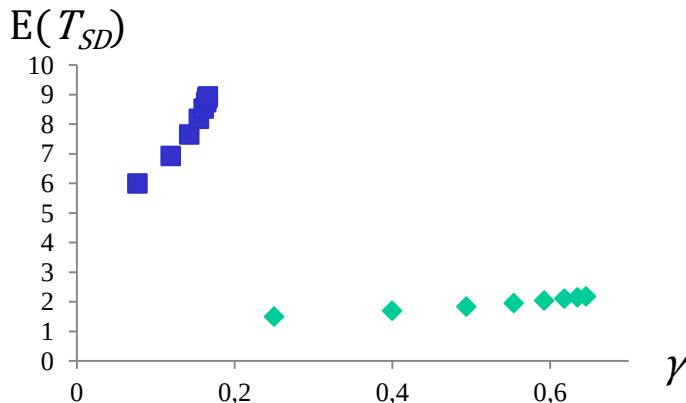
Έχουμε $X_0 = 1$, $X_1 = X_2 = X_3 = 2$, $X_r = 6$

Η ρυθμαπόδοση του συστήματος γ είναι:

W	1	2	3	4	5	6	7	8
γ	0.077	0.119	0.142	0.155	0.161	0.164	0.165	0.166

Η μέση καθυστέρηση πακέτων $E(T_{SD})$ είναι:

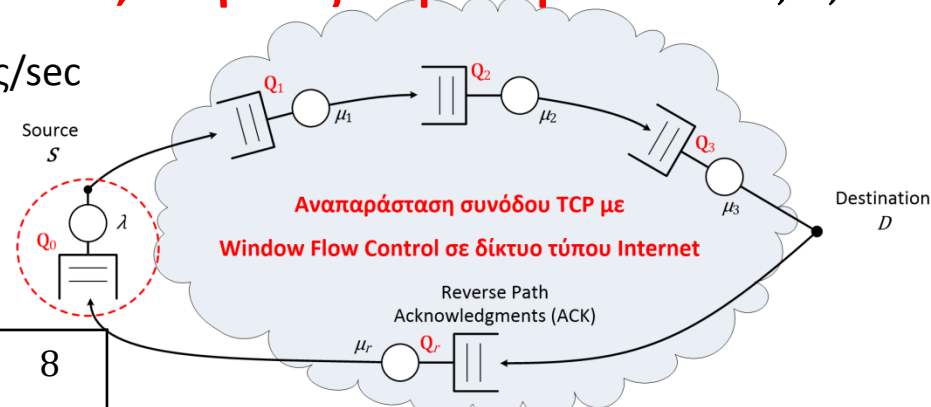
W	1	2	3	4	5	6	7	8
$E(T_{SD})$	6	6.92	7.65	8.18	8.53	8.75	8.87	8.94



Σύγκριση Επίδοσης Σεναρίων για Αυξανόμενες τιμές του W

■ Συμφόρηση στο Δίκτυο ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0.5, \lambda = 1$)

◆ Δίκτυο με καλή επίδοση ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 2, \lambda = 1$)



Πίνακας Τιμών $g(n, m)$

W	X_0	X_1	X_2	X_3	X_r
0	1	1	1	1	1
1	1	3	5	7	13
2	1	7	17	31	109
3	1	15	49	111	765
4	1	31	129	351	4941
5	1	63	321	1023	30669
6	1	127	769	2815	186829
7	1	255	1793	7423	1128397
8	1	511	4097	18943	6789325

Στην περίπτωση συμφόρησης, ανεκτή καθυστέρηση απαιτεί μικρές τιμές του W με σημαντικούς περιορισμούς ωφέλιμης ρυθμαπόδοσης

10^ο Μάθημα

Εφαρμογές Κλειστών Δικτύων Ουρών Markov:

1. Ανάλυση Window Flow Control σε Δίκτυα Υπολογιστών
2. Αξιολόγηση Συστημάτων Πολύ-προγραμματισμού (Multitasking)

Γενίκευση Μοντέλων Μορφής Γινομένου (BCMP)

ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ ΔΥΟ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ (επανάληψη)

Θεώρημα Gordon-Newell για $M = 2$ Ουρές, $N = 3$ Πελάτες

$$X_1 \mu_1 = X_2 \mu_2$$

$$X_1 = 1, X_2 = \mu_1 / \mu_2 = \alpha$$

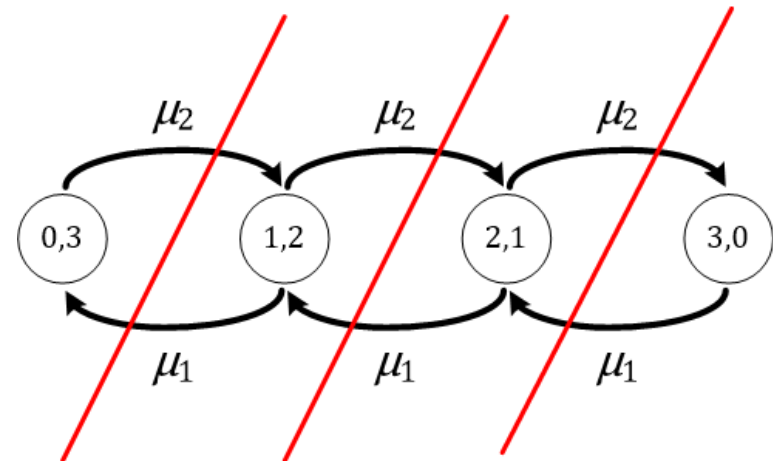
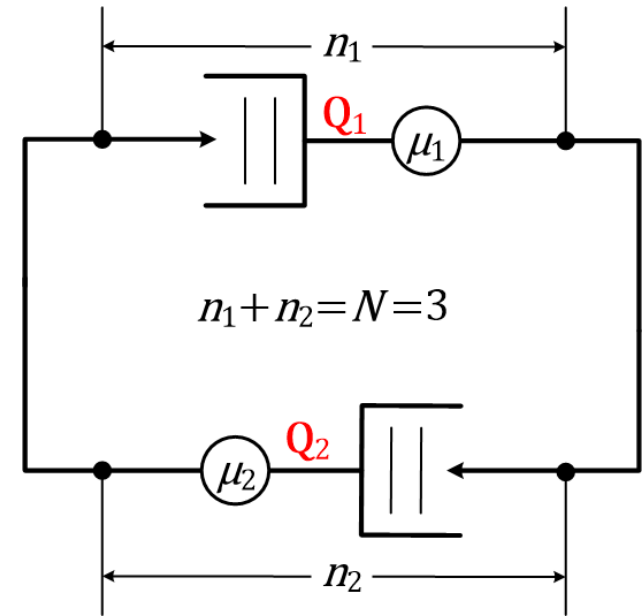
- $P(0,3) = X_2^3 / G(3) = \alpha^3 / G(3)$
- $P(1,2) = X_2^2 / G(3) = \alpha^2 / G(3)$
- $P(2,1) = X_2 / G(3) = \alpha / G(3)$
- $P(3,0) = 1 / G(3)$
- $1 / G(3) + \alpha / G(3) + \alpha^2 / G(3) + \alpha^3 / G(3) = 1$

$$\text{Άρα: } G(3) = 1 / (1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3)$$

$$\gamma = \mu_2 [1 - P(3,0)] = \mu_2 [1 - 1 / G(3)]$$

$$E(T_I) = E(n_I) / \gamma$$

- $E(n_1) = P(1,2) + 2P(2,1) + 3P(3,0) = \frac{[a^2 + 2a + 3]}{G(3)}$
- $E(n_2) = P(2,1) + 2P(1,2) + 3P(0,3) = \frac{[a + 2a^2 + 3a^3]}{G(3)}$
- $E(n_1) + E(n_2) = N = 3$



ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ ΔΥΟ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ (επανάληψη)

Αλγόριθμος Buzen για $M = 2$ Ουρές, $N = 3$ Πελάτες

Με βάση τον αναδρομικό αλγόριθμο του **Buzen**

και $X_1 = 1, X_2 = \mu_1/\mu_2 = a$ ισχύει ότι:

$$g(n, m) = g(n, m - 1) + X_m g(n - 1, m)$$

$$G(N) = g(N, M)$$

Προκύπτει :

$$G(1) = 1 + a$$

$$G(2) = 1 + a + a^2$$

$$G(3) = 1 + a + a^2 + a^3$$

Πίνακας Τιμών $g(n, m)$

n	X_1	X_2
0	1	1
1	1	$1 + a$
2	1	$1 + a + a^2$
3	1	$1 + a + a^2 + a^3$

Η χρησιμοποίηση της ουράς Q_1 είναι

$$\begin{aligned} P(n_i \geq 1) &= P(1,2) + P(2,1) + P(3,0) = 1 - P(0,3) = X_i G(N - 1) / G(N) = X_1 G(2) / G(3) = \\ &= \frac{1 + a + a^2}{1 + a + a^2 + a^3} \quad (\text{όπως και στη 2}^\eta \text{ διαφάνεια}) \end{aligned}$$

Επίσης:

$$P(0,3) = a^3 / G(3)$$

$$P(1,2) = a^2 / G(3)$$

$$P(2,1) = a / G(3)$$

$$P(3,0) = 1 / G(3)$$

$$E[n_i] = \sum_{k=1}^N X_i^k \frac{G(N - k)}{G(N)}$$

$$E(n_1) = \sum_{k=1}^3 \frac{G(3 - k)}{G(3)} = \frac{a^2 + 2a + 3}{1 + a + a^2 + a^3}$$

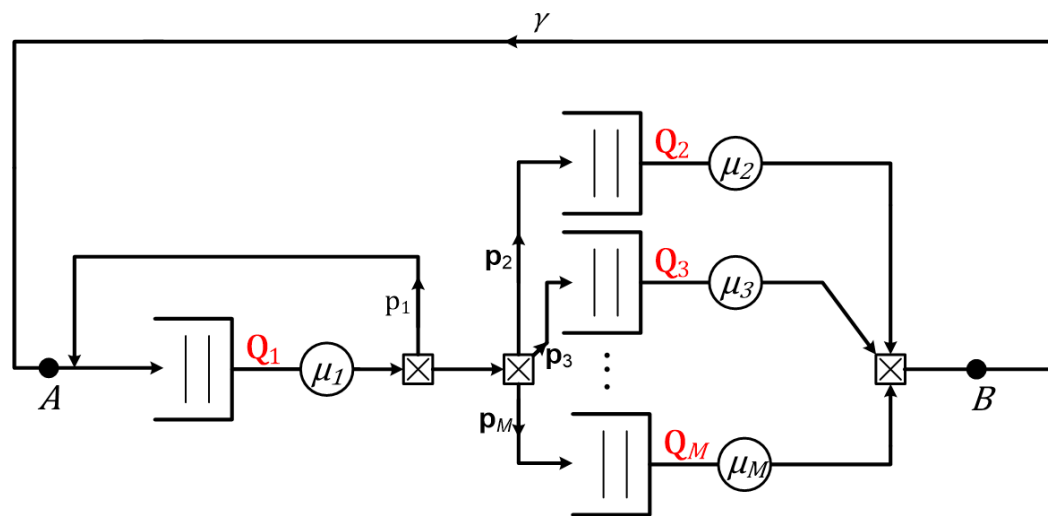
$$E(n_2) = \sum_{k=1}^3 X_2^k \frac{G(N - k)}{G(N)} = 3 - E(n_1) = \frac{a + 2a^2 + 3a^3}{1 + a + a^2 + a^3}$$

ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ (1/2) (επανάληψη)

Βασισμένο στο Παράδειγμα του *Jeffrey Buzen*, "Computational Algorithms for Closed Queuing Networks with Exponential Servers", Communications of the ACM 16 (9), Sept. 1973

Κλειστό δίκτυο M εκθετικών ουρών Q_1 (CPU), $Q_2, \dots, Q_M$ (I/O)

Παράλληλη Επεξεργασία N προγραμμάτων (εντολών) με ανακύκλωση στη CPU (πιθανότητα p_1), επιλογή υποσυστήματος I/O (με πιθανότητες $p_2, p_3, \dots, p_M$) και απάντηση – δημιουργία νέας εντολής (εξωτερική ανάδραση).



Εφαρμογή Αλγορίθμου **Buzen** για $N = 1, 2, 3, 4$ πελάτες (παράλληλα προγράμματα) και $M = 3$ ουρές Q_1, Q_2, Q_3

$$\mu_1 X_1 = p_1 \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \mu_3 X_3$$

$$\mu_2 X_2 = p_2 \mu_1 X_1$$

$$\mu_3 X_3 = p_3 \mu_1 X_1$$

$$\text{Με } \mu_1 = \frac{1}{28} \text{ msec}^{-1}, \mu_2 = \frac{1}{40} \text{ msec}^{-1}, \mu_3 = \frac{1}{280} \text{ msec}^{-1} \text{ και } X_1 = 1$$

προκύπτει πως $X_2 = 1, X_3 = 2$

Ο αναδρομικός τύπος $g(n, m) = g(n, m - 1) + X_m g(n - 1, m)$ δίνει τον πίνακα δεξιά

Οι σταθερές $G(N) = g(N, 3)$ αντιστοιχούν σε $N = 1, 2, 3, 4$ προγράμματα
 $G(1) = 4, \quad G(2) = 11, \quad G(3) = 26, \quad G(4) = 57$

Πίνακας Τιμών $g(n, m)$

n	X_1	X_2	X_3
0	1	1	1
1	1	2	4
2	1	3	11
3	1	4	26
4	1	5	57

ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ (2/2) (επανάληψη)

Βασισμένο στο Παράδειγμα του *Jeffrey Buzen*, "Computational Algorithms for Closed Queuing Networks with Exponential Servers", Communications of the ACM 16 (9), Sept. 1973

Οι αντίστοιχοι βαθμοί
χρησιμοποίησης U_1 της CPU (Q_1)
 $G(N)/G(N-1)$ είναι:

N	1	2	3	4
U_1	1/4	4/11	11/26	26/57

Η ρυθμαπόδοση του συστήματος είναι

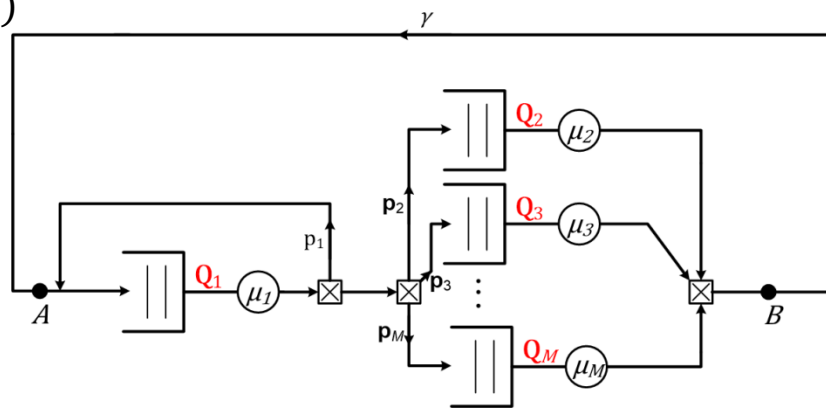
$$\begin{aligned}\gamma &= \mu_2 p(n_2 \geq 1) + \mu_3 p(n_3 \geq 1) \\ &= \mu_2 X_2 G(N-1)/G(N) + \mu_3 X_3 G(N-1)/G(N) \\ &= (\mu_2 X_2 + \mu_3 X_3) G(N-1)/G(N)\end{aligned}$$

Οι αντίστοιχες τιμές σε προγράμματα/sec είναι:

N	1	2	3	4
γ	8.04	11.69	13	14.66

Πίνακας Τιμών $g(n, m)$

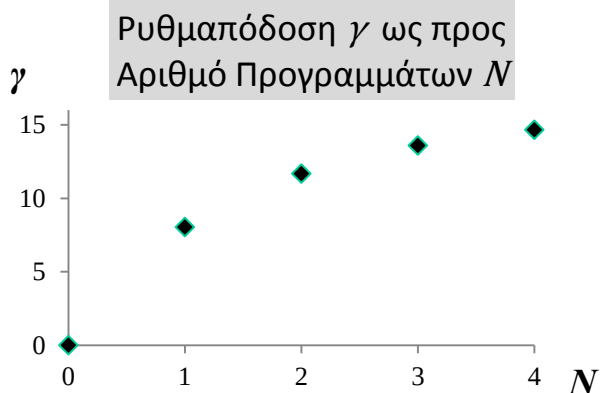
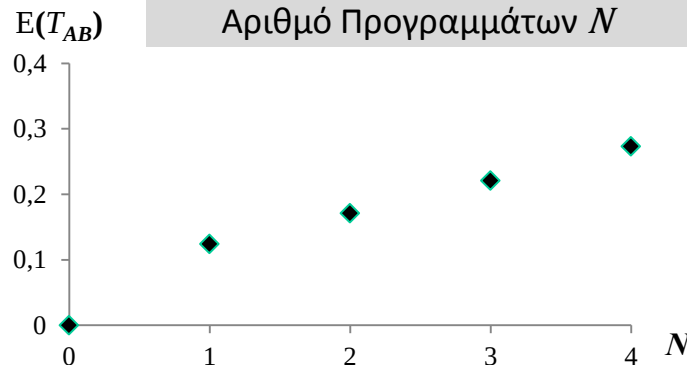
n	X_1	X_2	X_3
0	1	1	1
1	1	2	4
2	1	3	11
3	1	4	26
4	1	5	57



Ο μέσος χρόνος απόκρισης είναι $E(T_{AB}) = N/\gamma$
Οι αντίστοιχες τιμές σε sec είναι:

N	1	2	3	4
$E(T_{AB})$	0.124	0.171	0.221	0.273

Μέσος Χρόνος Απόκρισης ως προς
Αριθμό Προγραμμάτων N



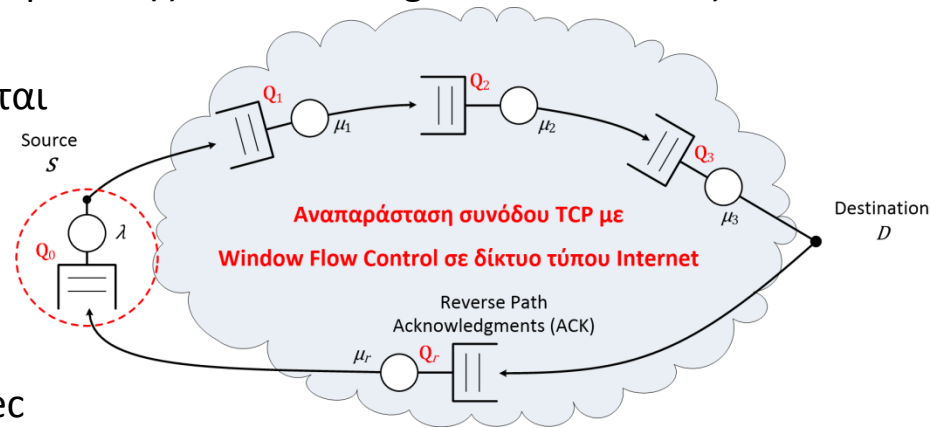
ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΑΚΡΟ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΤΟ INTERNET (1/10)

End-to-End Window Flow Control TCP Session, Μέγεθος Παραθύρου W (επανάληψη)

Αναπάρασταση Μηχανισμού Ελέγχου Ροής Παραθύρου (**Window Flow Control**) μέσω Κλειστού Δικτύου M ανεξαρτήτων εκθετικών ουρών και W πελατών. Η μορφή των πελατών εναλλάσσεται ανάμεσα σε πακέτα δεδομένων, μηνύματα επιβεβαίωσης – acknowledgments και άδειες εκπομπής – tokens

Το κλειστό δίκτυο του παραδείγματος αποτελείται από $M = 5$ υποσυστήματα:

- Q_0 : Αποθηκεύει τα Tokens στην πηγή (Source) με τον μηχανισμό Window Flow Control και αποστέλλει στον προορισμό (Destination) νέα πακέτα ανά χρονικά διαστήματα μέσης τιμής $1/\lambda$ sec (μοντέλο δημιουργίας κίνησης λ πακέτα/sec)
- Q_1, Q_2, Q_3 : Ενδιάμεσοι δικτυακοί κόμβοι μεταγωγής πακέτου με μέσους εκθετικούς ρυθμούς μ_1, μ_2, μ_3 πακέτα/sec
- Q_r : Ισοδύναμο μοντέλο καθυστέρησης για την δημιουργία και μεταβίβαση μηνυμάτων επιβεβαίωσης – ACK σαν ανεξάρτητη ουρά με μέσο εκθετικό ρυθμό μ_r πακέτα/sec (θεωρούμε κατά προσέγγιση $1/\mu_r \cong 1/\mu_1 + 1/\mu_2 + 1/\mu_3$ sec)

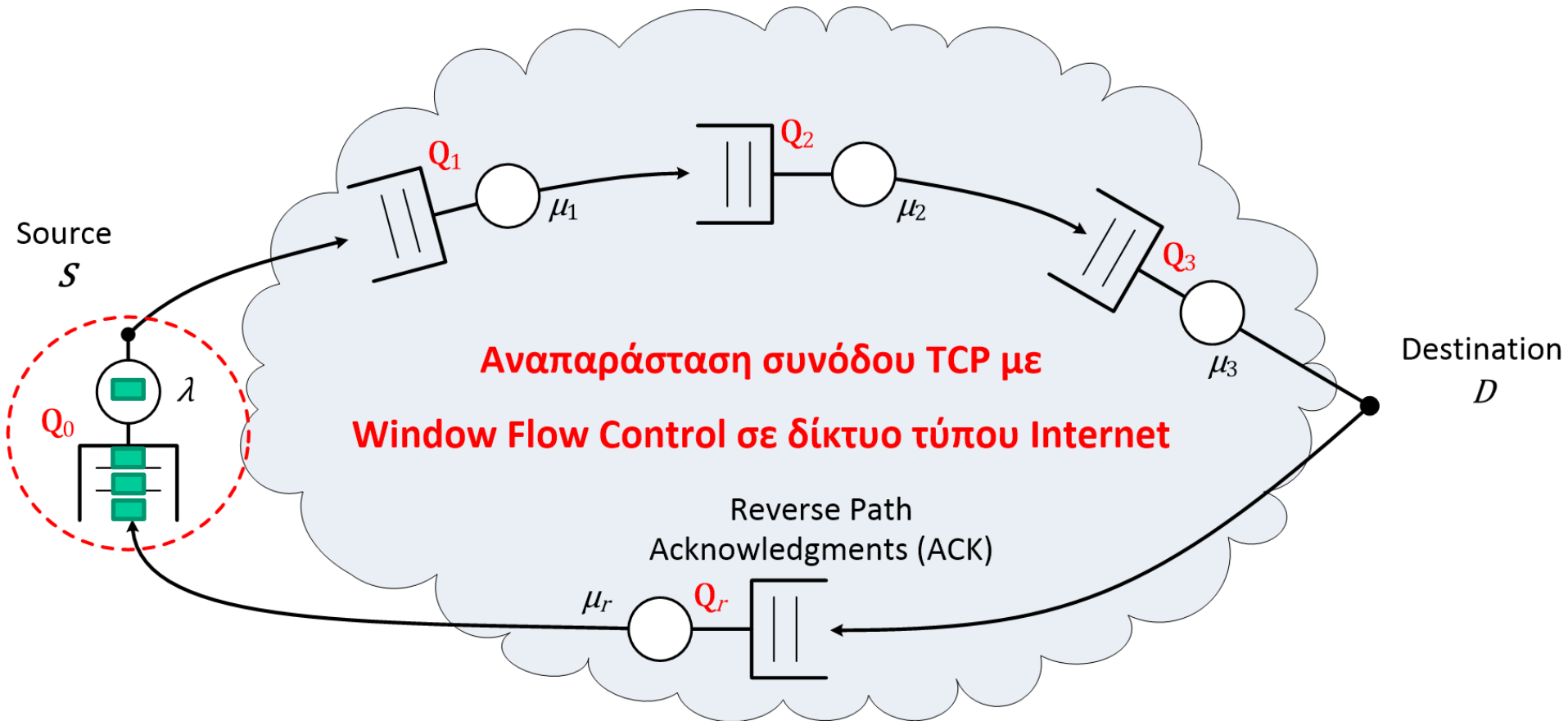


Στο κλειστό δίκτυο υπάρχουν ανά πάσα στιγμή $W \leq 8$ πελάτες που αντιστοιχούν στο μέγεθος παραθύρου – Window Size: $W = n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + n_r$

Θεωρούμε πως ισχύουν οι παραδοχές για μορφή γινομένου του θεωρήματος **Gordon – Newell** και εφαρμόζουμε τον Αλγόριθμο του **Buzen** για $W = 1, \dots, 8$ πελάτες που κυκλοφορούν σε $M = 5$ ουρές, ως προς την ρυθμαπόδοση γ και την μέση καθυστέρηση πακέτου από άκρο σε άκρο (S σε D) στο δίκτυο $E(T_{S,D}) = [E(n_1) + E(n_2) + E(n_3)]/\gamma$

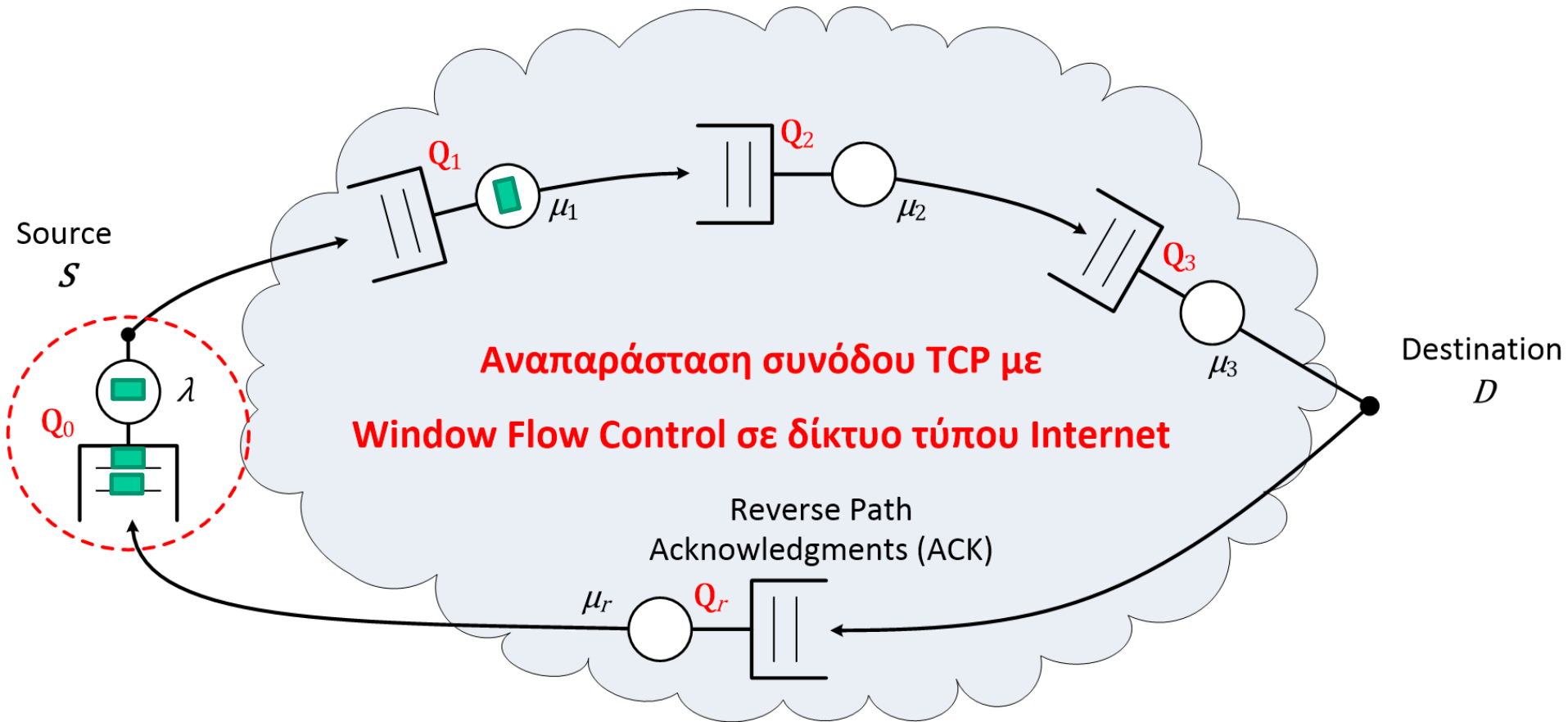
ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΑΚΡΟ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΤΟ INTERNET (2/10)

End-to-End Window Flow Control TCP Session, Μέγεθος Παραθύρου $W=4$
(επανάληψη)



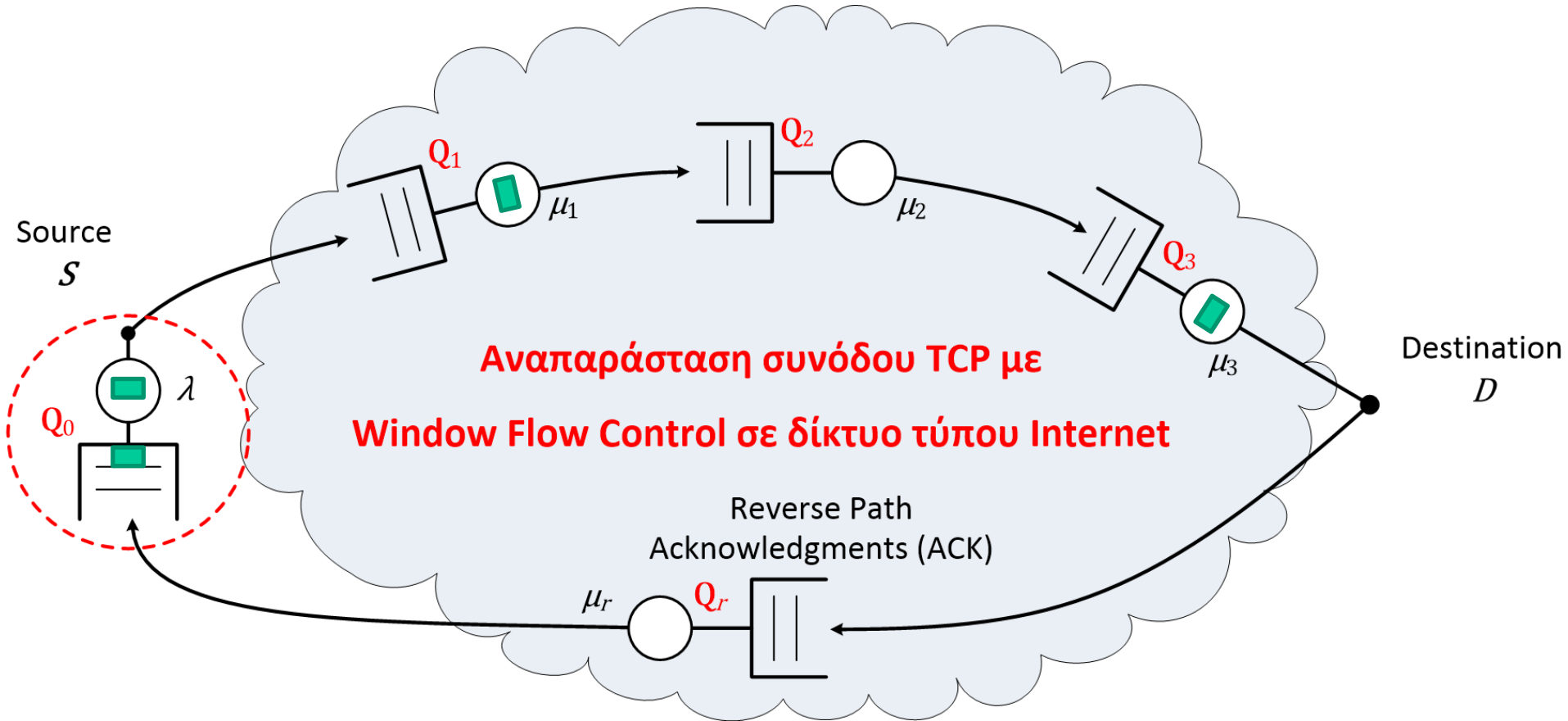
ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΑΚΡΟ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΤΟ INTERNET (3/10)

End-to-End Window Flow Control TCP Session, Μέγεθος Παραθύρου $W=4$
(επανάληψη)



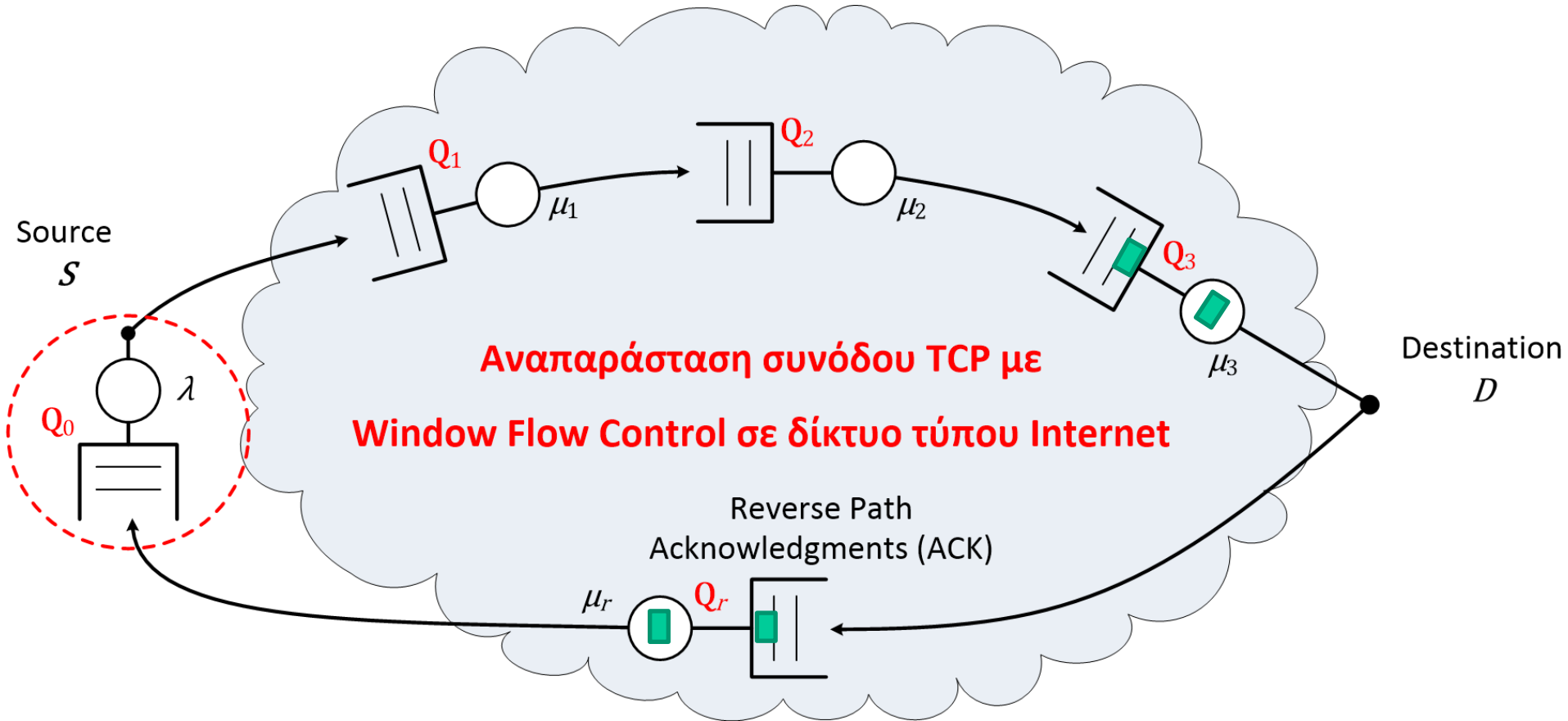
ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΑΚΡΟ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΤΟ INTERNET (4/10)

End-to-End Window Flow Control TCP Session, Μέγεθος Παραθύρου $W=4$
(επανάληψη)



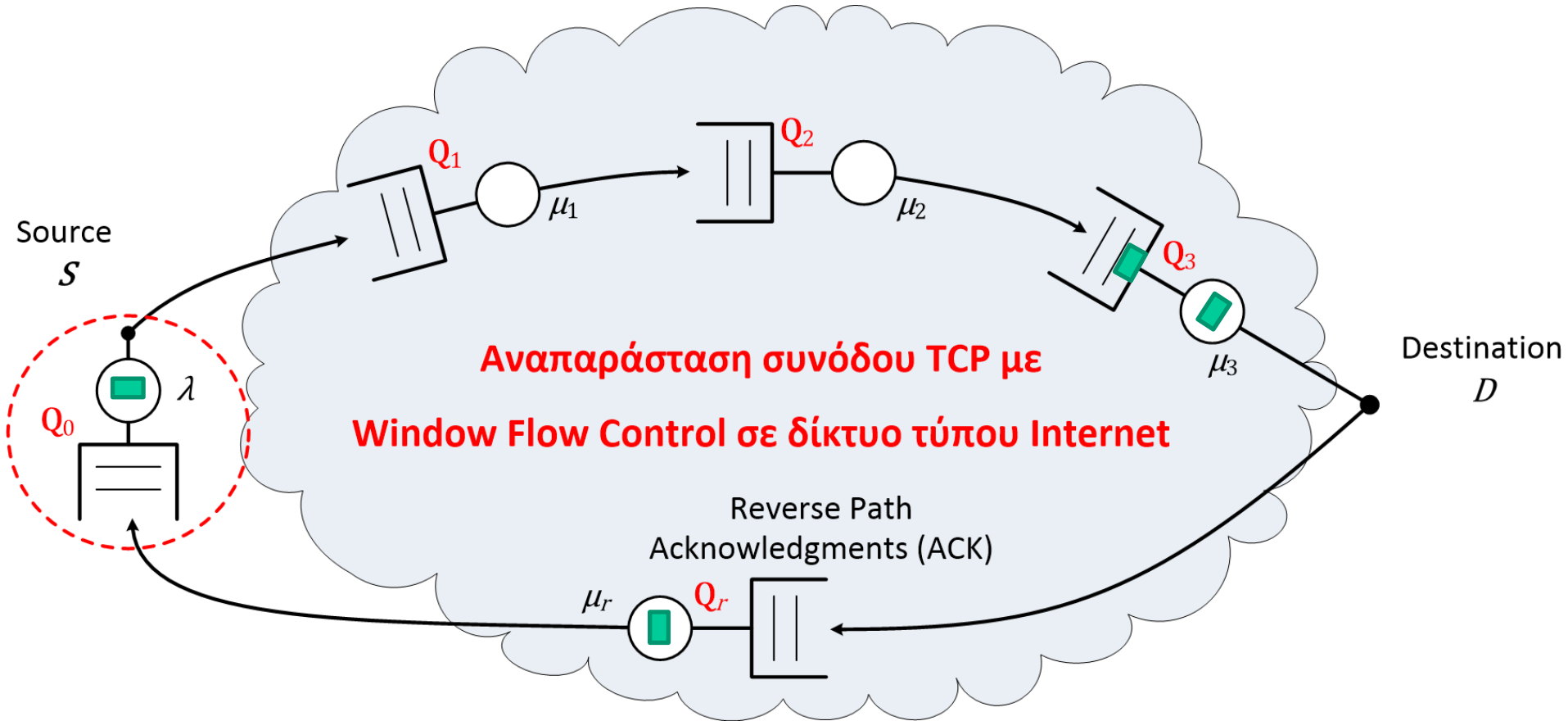
ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΑΚΡΟ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΤΟ INTERNET (5/10)

End-to-End Window Flow Control TCP Session, Μέγεθος Παραθύρου $W=4$
(επανάληψη)



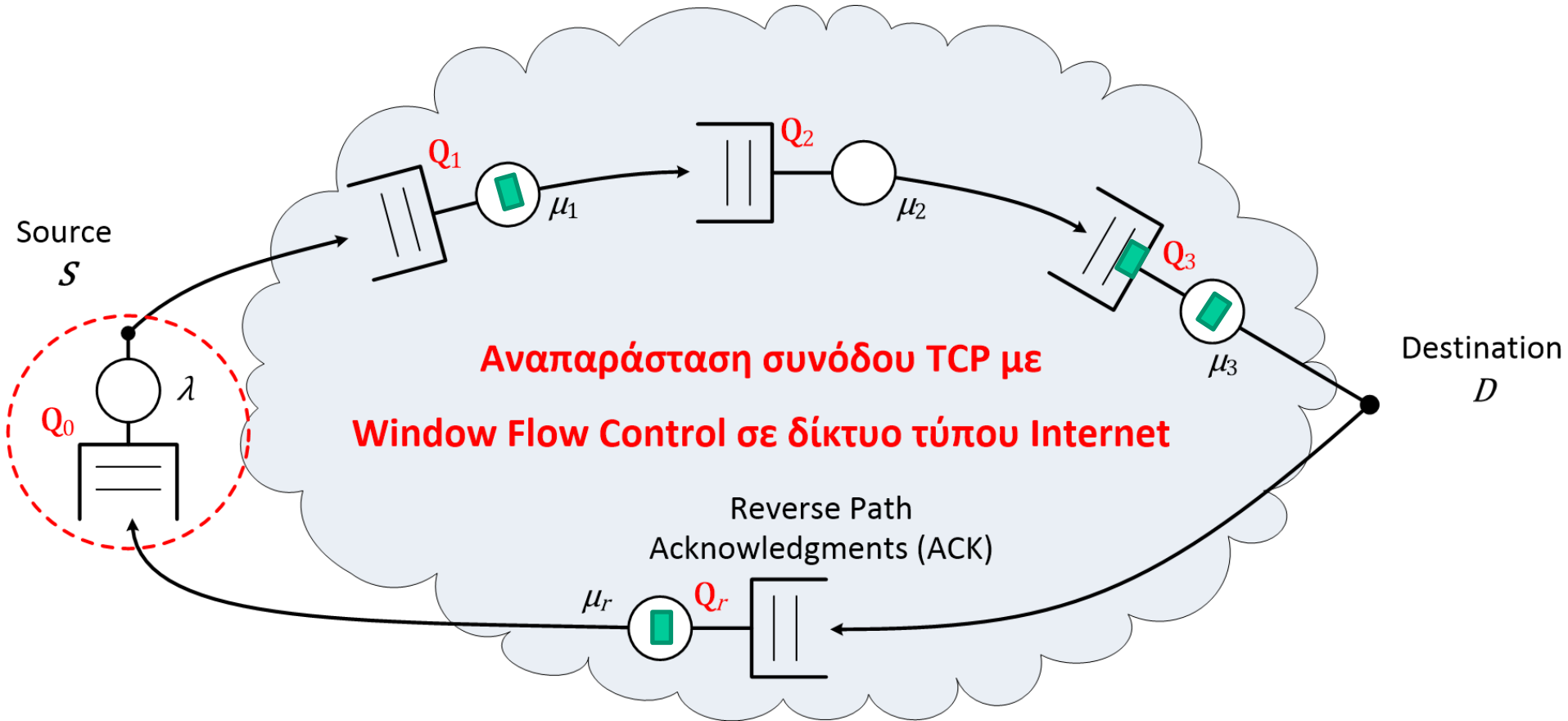
ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΑΚΡΟ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΤΟ INTERNET (6/10)

End-to-End Window Flow Control TCP Session, Μέγεθος Παραθύρου $W=4$
(επανάληψη)



ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΑΚΡΟ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΤΟ INTERNET (7/10)

End-to-End Window Flow Control TCP Session, Μέγεθος Παραθύρου $W=4$
(επανάληψη)



ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΑΚΡΟ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΤΟ INTERNET (8/10)

End-to-End Window Flow Control TCP Session, Μέγεθος Παραθύρου $W=4$ (επανάληψη)

Υποθέτουμε πως $\lambda = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 2$ πελάτες/sec

$$\frac{1}{\mu_r} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} = \frac{3}{2} \text{ sec ή } \mu_r = 2/3 \text{ πελάτες/sec}$$

Με $X_0 = 1$ έχουμε:

$$\lambda X_0 = \mu_1 X_1 = \mu_2 X_2 = \mu_3 X_3 = \mu_r X_r$$

$$\text{Άρα: } X_1 = X_2 = X_3 = 0.5, X_r = 3/2$$

Ο αναδρομικός τύπος $g(n, m) = g(n, m-1) + X_m g(n-1, m)$
δίνει τον πίνακα δεξιά

Οι σταθερές $G(W) = g(W, 5)$ αντιστοιχούν σε $W = 1, \dots, 8$

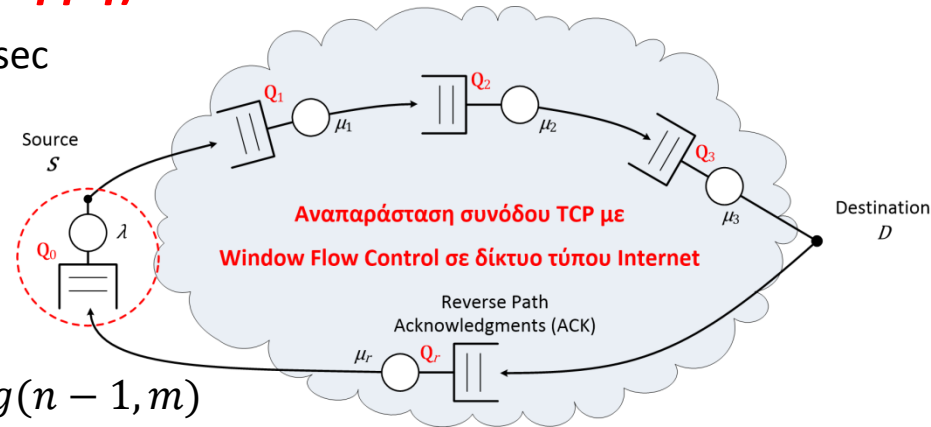
Η ρυθμαπόδοση του συστήματος γ σε πακέτα/sec είναι:

$$\gamma = \mu_1 p(n_1 \geq 1) = \mu_1 X_1 G(W-1)/G(W)$$

Η μέση καθυστέρηση πακέτων σε sec από το S στο D είναι

$$E(T_{SD}) = [E(n_1) + E(n_2) + E(n_3)]/\gamma, \text{ όπου}$$

$$E[n_i] = \sum_{k=1}^N X_i^k \frac{G(N-k)}{G(N)}$$



Πίνακας Τιμών $g(n, m)$

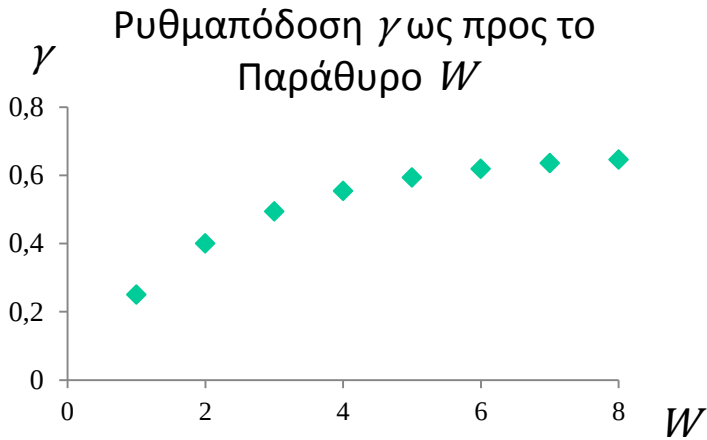
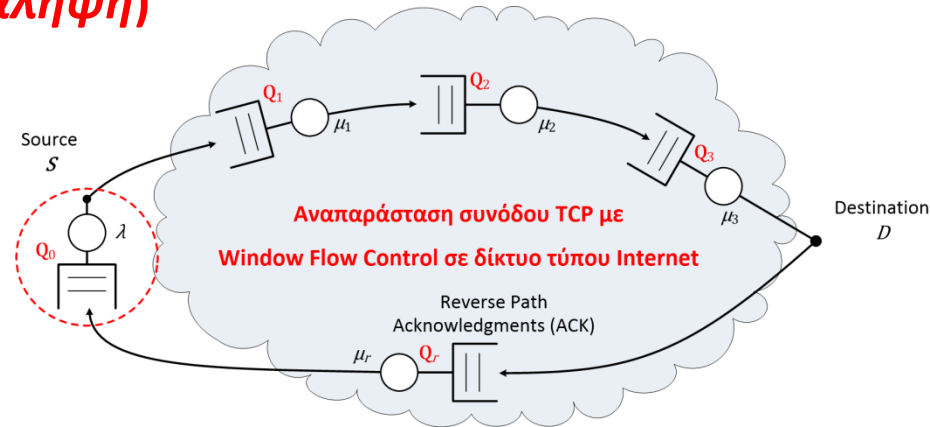
W	X_1	X_2	X_3	X_4	X_r
0	1	1	1	1	1
1	1	1.5	2	2.5	4
2	1	1.75	2.75	4	10
3	1	1.88	3.25	5.25	20.25
4	1	1.94	3.56	6.19	36.56
5	1	1.97	3.75	6.84	61.69
6	1	1.98	3.86	7.28	99.81
7	1	1.99	3.92	7.56	157.28
8	1	1.99	3.96	7.74	243.66

ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΑΚΡΟ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΤΟ INTERNET (9/10)

End-to-End Window Flow Control TCP Session, Μέγεθος Παραθύρου $W = 1, \dots, 8$ (Επανάληψη)

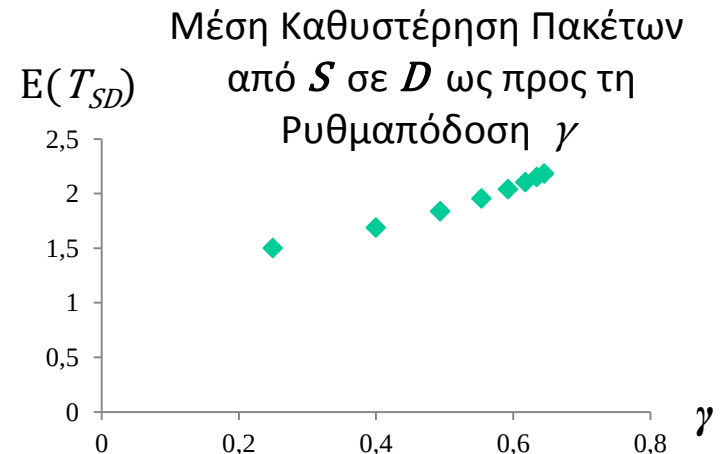
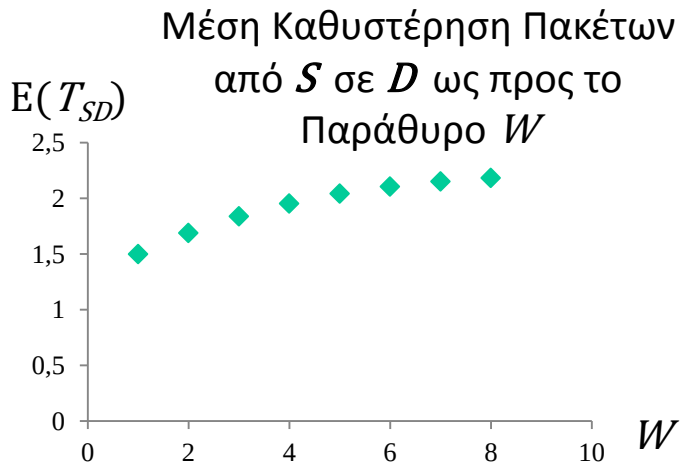
Ρυθμαπόδοση του συστήματος, $\gamma = \mu_1 p(n_1 \geq 1)$:

W	1	2	3	4	5	6	7	8
γ	0.25	0.4	0.49	0.55	0.59	0.62	0.63	0.65



Μέση καθυστέρηση πακέτου από το S στο D , $E(T_{SD})$:

W	1	2	3	4	5	6	7	8
$E(T_{SD})$	1.5	1.69	1.84	1.95	2.04	2.1	2.15	2.18



ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΑΚΡΟ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΤΟ INTERNET (10/10)

End-to-End Window Flow Control TCP Session, Μέγεθος Παραθύρου $W = 1, \dots, 8$

Σενάριο Συμφόρησης

(Επανάληψη)

Υποθέτουμε πως $\lambda = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1/2$ πελάτες/sec

$1/\mu_r = 1/\mu_1 + 1/\mu_2 + 1/\mu_3 = 6$ sec ή $\mu_r = 1/6$

(ανεπαρκείς ταχύτητες γραμμών $\Rightarrow$ **συμφόρηση**)

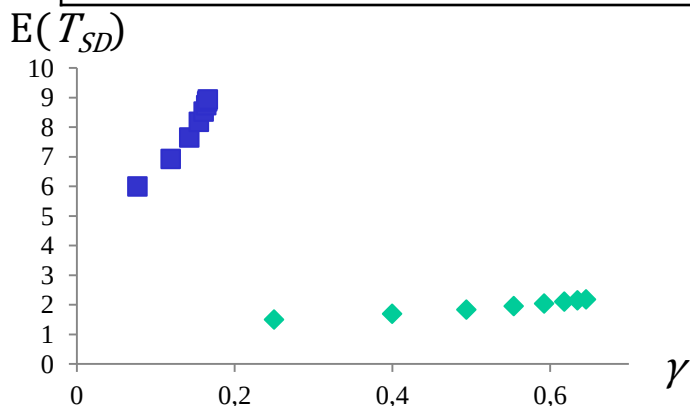
Έχουμε $X_0 = 1$, $X_1 = X_2 = X_3 = 2$, $X_r = 6$

Η ρυθμαπόδοση του συστήματος γ είναι:

W	1	2	3	4	5	6	7	8
γ	0.077	0.119	0.142	0.155	0.161	0.164	0.165	0.166

Η μέση καθυστέρηση πακέτων $E(T_{SD})$ είναι:

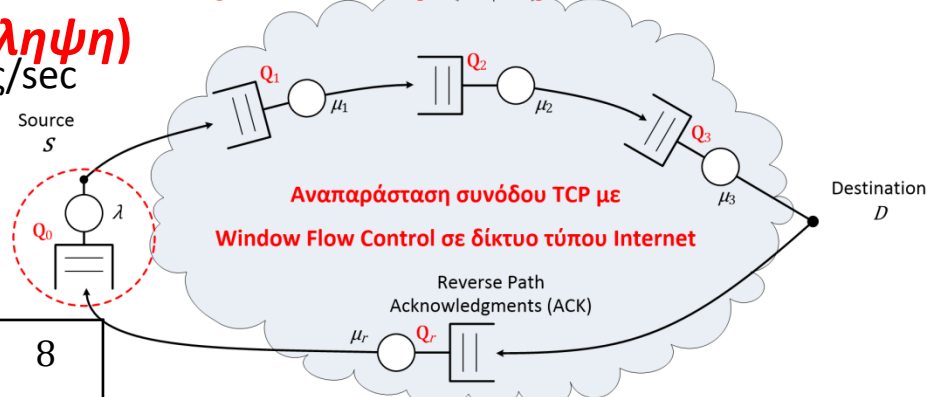
W	1	2	3	4	5	6	7	8
$E(T_{SD})$	6	6.92	7.65	8.18	8.53	8.75	8.87	8.94



Σύγκριση Επίδοσης Σεναρίων για Αυξανόμενες τιμές του W

■ Συμφόρηση στο Δίκτυο ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0.5, \lambda = 1$)

◆ Δίκτυο με καλή επίδοση ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 2, \lambda = 1$)



Πίνακας Τιμών $g(n, m)$

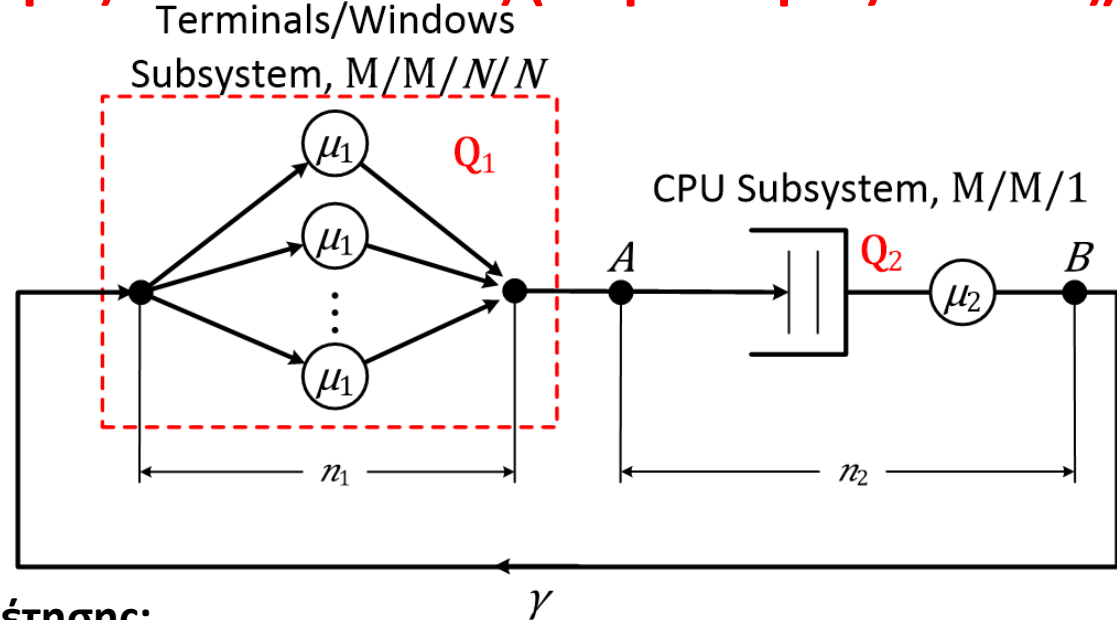
W	X_0	X_1	X_2	X_3	X_r
0	1	1	1	1	1
1	1	3	5	7	13
2	1	7	17	31	109
3	1	15	49	111	765
4	1	31	129	351	4941
5	1	63	321	1023	30669
6	1	127	769	2815	186829
7	1	255	1793	7423	1128397
8	1	511	4097	18943	6789325

Στην περίπτωση συμφόρησης, ανεκτή καθυστέρηση απαιτεί μικρές τιμές του W με σημαντικούς περιορισμούς ωφέλιμης ρυθμαπόδοσης

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΟΛΥ-ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ (1/4)

Κλειστό Δίκτυο με $M = 2$ Ουρές και N Πελάτες (Παράλληλες Εντολές)

Το μοντέλο θεωρεί N πελάτες που περιφέρονται σε κλειστό δίκτυο. Εναλλάσσονται σε δύο υποσυστήματα, είτε με τη μορφή σκέψης ενός «χρήστη» (τερματικό ή ενεργό παράθυρο) για την παραγωγή (**input**) νέας εντολής, ή με τη μορφή επεξεργασίας εντολών που έχουν κατατεθεί και αναμένεται η απόκριση (**output**) στον «χρήστη»



Μοντέλα 2 Υποσυστημάτων Εξυπηρέτησης:

- **Υποσύστημα Παραγωγής Εντολών:** Q_1 , M/M/ ∞ (ή M/M/N/N) με εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης (**Thinking Time**, T_{TH}) μέσης τιμής $E(T_{TH}) = 1/\mu_1$
Ο χρόνος T_{TH} αντιστοιχεί με τον χρόνο «σκέψης» για την σύνταξη μιας νέας εντολής εισόδου (**input**) σε συνέχεια της απόκρισης (**output**) από προηγούμενη εντολή
- **Υποσύστημα Επεξεργασίας Εντολών:** Q_2 , M/M/1 με εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης $1/\mu_2$ και μέσο χρόνο καθυστέρησης (**Processing Time**, T_{PR}) μέσης τιμής $E(T_{PR})$
Η ουρά Q_2 αντιστοιχεί με το συνολικό σύστημα επεξεργασίας εντολών (CPU, I/O) σαν συναθροισμένο ισοδύναμο μοντέλο (**aggregate equivalent**, γενικεύεται σαν **Ισοδύναμο Norton**)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΟΛΥ-ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ (2/4)

Κλειστό Δίκτυο με $M = 2$ Ουρές και N Πελάτες (Παράλληλες Εντολές)

Ανάλυση Κλειστού Δικτύου Markov

Εργοδικές Καταστάσεις

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2), n_1 + n_2 = N$$

Εξισώσεις Ισορροπίας:

$$\mu_2 P(0, N) = \mu_1 P(1, N - 1)$$

$$\mu_2 P(k, N - k) = (k + 1) \mu_1 P(k + 1, N - k + 1)$$

$$\mu_2 P(N - 1, 1) = N \mu_1 P(N, 0)$$

$$\text{Αν } a \triangleq \mu_2 / \mu_1 \Rightarrow P(k, N - k) = P(0, N) \frac{a^k}{k!}$$

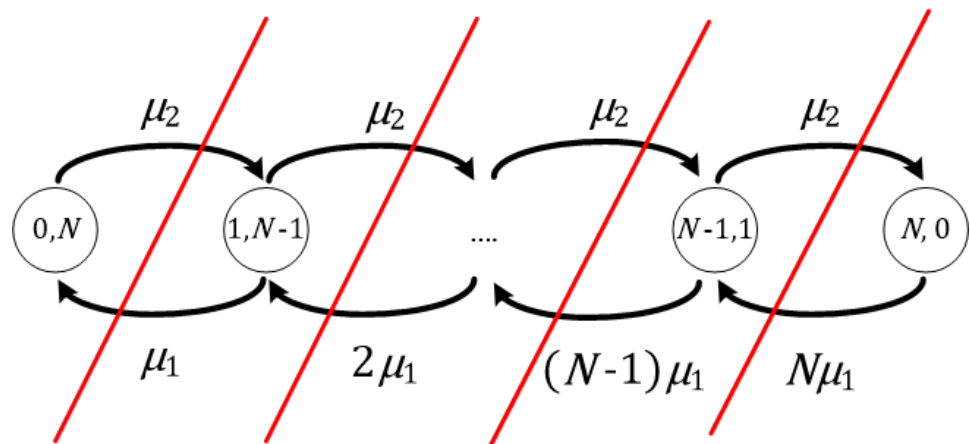
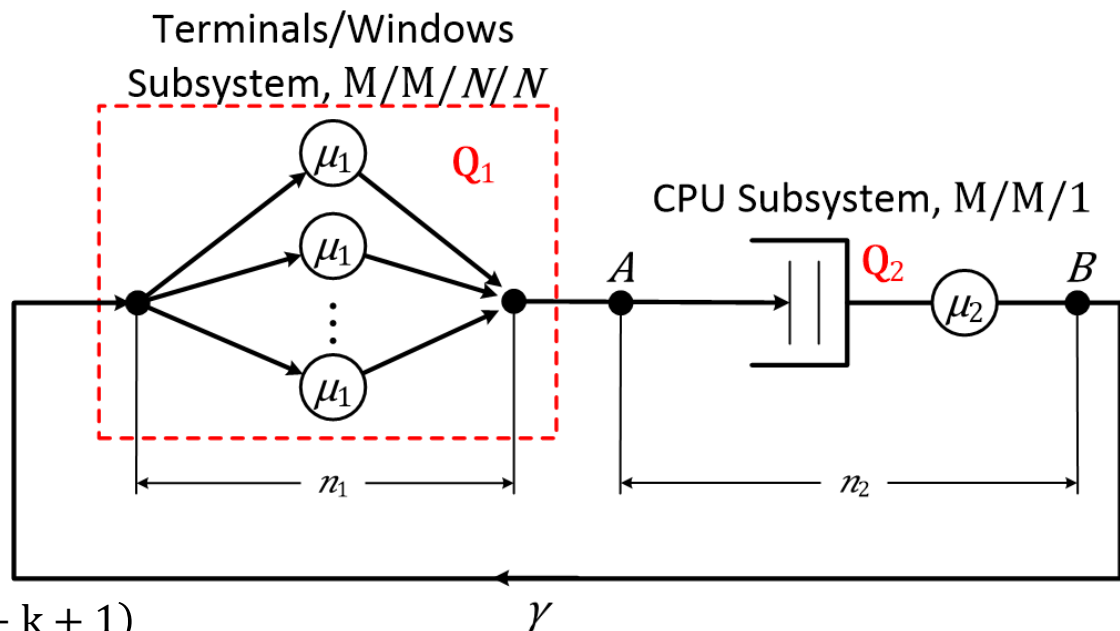
$$\text{και } P(k, N - k) = \frac{\frac{a^k}{k!}}{\sum_{n=0}^N \frac{a^n}{n!}}$$

Υπολογισμοί όπως για Erlang-B:

$$P(N, 0) = B(a, N), P(N - 1, 1) = N \mu_1 B(a, N), \dots$$

$$E(n_2) = \sum_{k=1}^N k P(N - k, k) \text{ και η ρυθμαπόδοση } \gamma = \mu_2 [1 - P(N, 0)] \text{ εντολές/sec}$$

$$\text{Η Μέση Καθυστέρηση Εντολών στο Υποσύστημα Επεξεργασίας είναι } E(T_{PR}) = E(n_2) / \gamma \text{ sec}$$

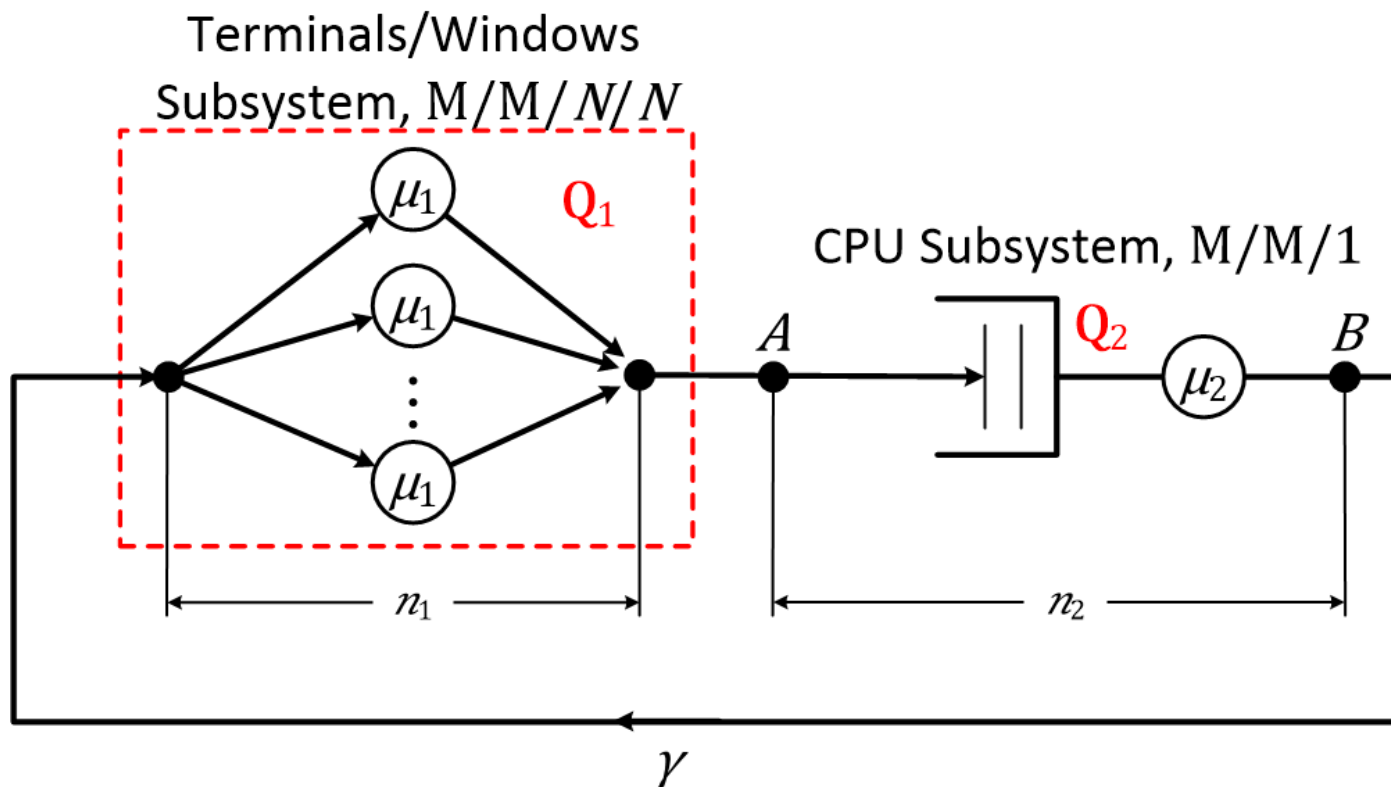


ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΟΛΥ-ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ (3/4)

Κλειστό Δίκτυο με $M = 2$ Ουρές και N Πελάτες (Παράλληλες Εντολές)

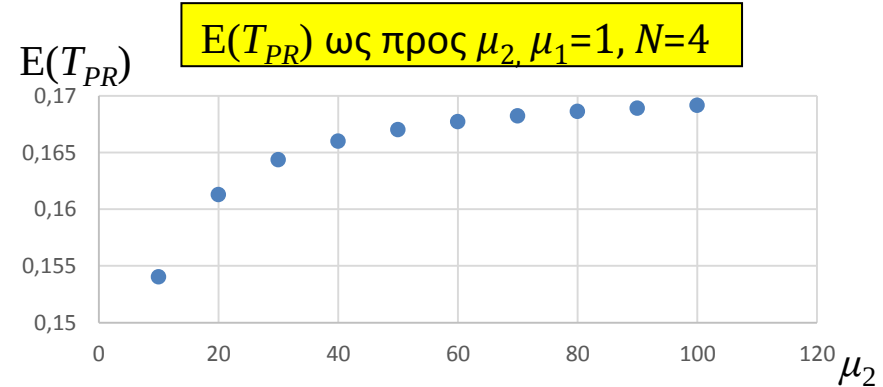
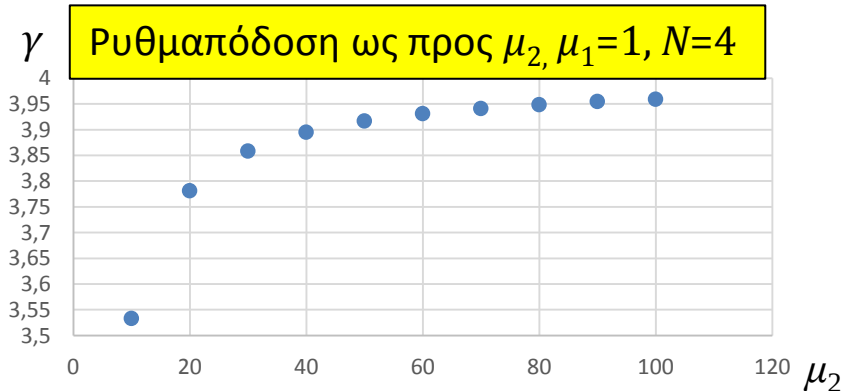
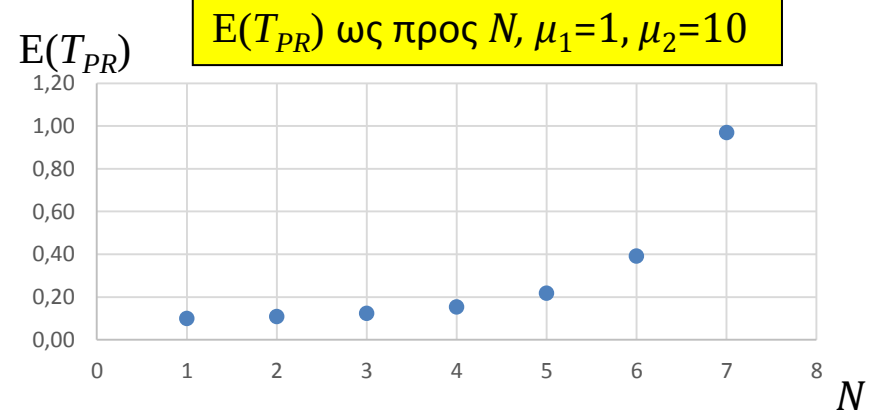
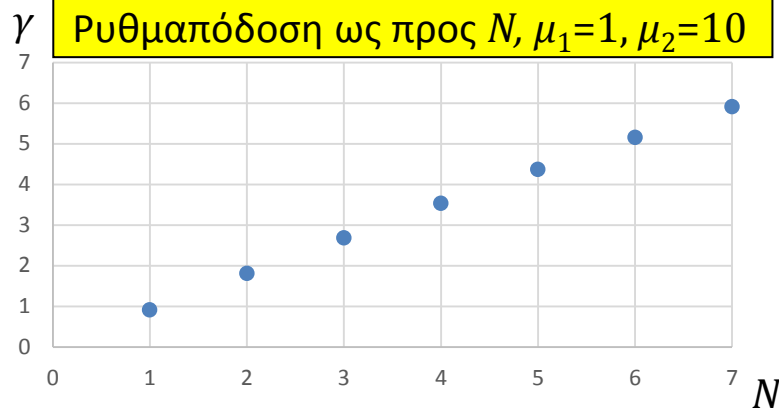
Αριθμητικά Αποτελέσματα:

Εφαρμογή της ανάλυσης για τιμές των $\mu_1 = 1, \mu_2 = 10$ ($\alpha = \frac{\mu_2}{\mu_1} = 10$) και μεταβάλλοντας τις δυνατότητες παραλληλισμού (Βαθμός Πολύ-προγραμματισμού, **Degree of Parallelism - Multitasking**) $N = 1, \dots, 7$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΟΛΥ-ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ (4/4)

Κλειστό Δίκτυο με $M = 2$ Ουρές και N Πελάτες (Παράλληλες Εντολές)



Συμπεράσματα:

1. Για αυξανόμενο βαθμό πολύ-προγραμματισμού N αναμένεται βελτίωση της Ρυθμαπόδοσης γ προς ένα μέγιστο όριο, με παράλληλη αύξηση της Μέσης Καθυστέρησης Επεξεργασίας Εντολών $E(T_{PR})$

2. Όσο μειώνεται ο Μέσος Χρόνος Σκέψης $E(T_{TH}) = 1/\mu_1 \rightarrow 0$ των χρηστών για $N = 4$ βελτιώνεται η Ρυθμαπόδοση γ και αυξάνεται η Μέση Καθυστέρηση Επεξεργασίας Εντολών, συγκλίνοντας προς τα αποτελέσματα ουράς M/M/1 ρυθμού εισόδου γ και ρυθμού εξυπηρέτησης μ_2 : $E(T_{PR}) \rightarrow \frac{1/\mu_2}{1-\gamma/\mu_2} \cong 0.166$

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΓΙΑ ΔΙΚΤΥΑ ΟΥΡΩΝ ΜΕ ΕΡΓΟΔΙΚΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΜΟΡΦΗΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

- **BCMP Networks:** F. **B**asket, K.M. **C**handi, R.H. **M**untz, F.C. **P**alacios: “Open, Closed, and Mixed Networks of Queues with Different Classes of Customers”, Journal of the ACM, 22 (2), April 1975
- **Παραδοχές:**
 - Δίκτυο M συστημάτων εξυπηρέτησης (ουρών) Q_i των εξής τύπων:
 1. Εξυπηρέτησης **FCFS (FIFO)** $M/M/1$ με εκθετικό εξυπηρετητή $1/\mu_i$ και ενιαίο τύπο πελατών
 2. Εξυπηρέτησης **Processor Sharing** $M/G/1$ με πολλαπλές κλάσεις (τύπους, chains) πελατών
 3. Ουρές με άπειρους εξυπηρετητές $M/G/\infty$ με πολλαπλές κλάσεις (τύπους, chains) πελατών
 4. Εξυπηρέτησης **LCFS** (with pre-emptive resume) $M/G/1$ με πολλαπλές κλάσεις (τύπους, chains) πελατών
 - Για τις περιπτώσεις 2-4 η κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης πρέπει να έχει μετασχηματισμό Laplace μορφής κλάσματος (rational Laplace Transform)
 - Η δρομολόγηση μεταξύ ουρών γίνεται με τυχαίο τρόπο
 - Ισχύει η παραδοχή ανεξαρτησίας του Kleinrock
 - Poisson εξωτερικές αφίξεις
- **Αποτέλεσμα:** Η εργοδική πιθανότητα (αν υπάρχει) του διανύσματος κατάστασης $(x_1, x_2, \dots, x_M)$ του δικτύου δίνεται σε μορφή γινομένου παραγόντων εξαρτώμενων από την κατάσταση της κάθε ουράς: $p(x_1, x_2, \dots, x_M) = C \times \pi_1(x_1) \times \pi_2(x_2) \times \dots \times \pi_M(x_M)$ (απόδειξη με επαλήθευση εξισώσεων ισορροπίας μεταβάσεων)

11^ο Μάθημα

Επισκόπηση Αναλυτικών Τεχνικών Θεωρίας Πιθανοτήτων για Εφαρμογή σε Ουρές Αναμονής M/G/1

Απόδειξη Τύπου Little

Ιδιότητα PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages)

Βασικοί Ορισμοί Θεωρίας Ανανέωσης (Renewal Theory)

Υπολειπόμενη Ζωή (Residual Life, Renewal Paradox)

Ροπογεννήτριες Συναρτήσεις (Moment Generating Functions – MGM)

ΤΥΠΟΣ Little

Γενικό Σύστημα Αναμονής σε Εργοδική Ισορροπία

Σε χρονικό ορίζοντα t :

$A(t)$: Συνολικός αριθμός αφίξεων στο διάστημα $(0, t)$

$D(t)$: Συνολικός αριθμός αναχωρήσεων στο διάστημα $(0, t)$

T_i : Χρόνος παραμονής στο σύστημα του πελάτη $i, i = 1, \dots, D(t)$

Ο αριθμός πελατών στο σύστημα στο χρόνο t είναι:

$$n(t) = A(t) - D(t)$$

Ο συνολικός αριθμός πελατών στο σύστημα στο διάστημα $(0, t)$ είναι:

$$\int_0^t n(\tau) d\tau \cong \sum_{i=1}^{D(t)} T_i$$

Σε χρονικό ορίζοντα $T \rightarrow \infty$ η ρυθμαπόδοση γ και ο χρόνος καθυστέρησης $E(T)$ στην εργοδική κατάσταση είναι:

$$\gamma = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{D(T)}{T}, \quad E(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{D(T)} \sum_{i=1}^{D(T)} T_i \right]$$

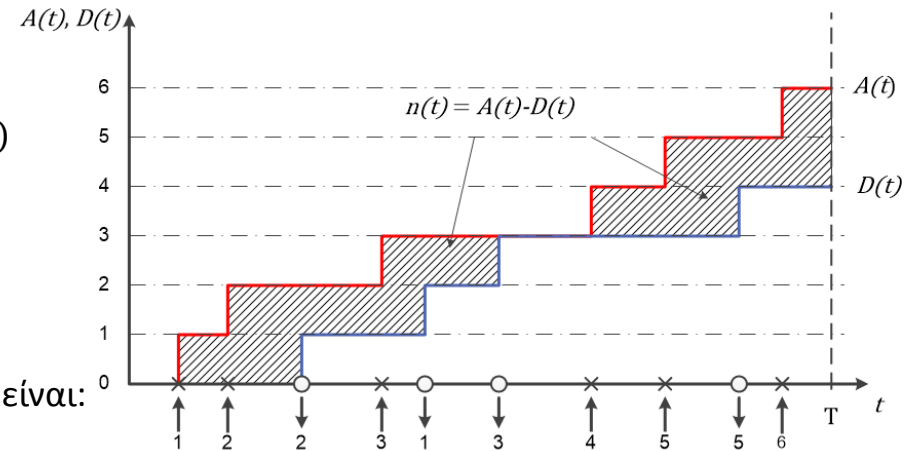
Λόγω εργοδικότητας:

$$E[n(t)] = E(n) =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_0^T n(\tau) d\tau \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \sum_{i=1}^{D(T)} T_i \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{D(T)}{T} \times \frac{1}{D(T)} \sum_{i=1}^{D(T)} T_i \right]$$

Και τελικά:

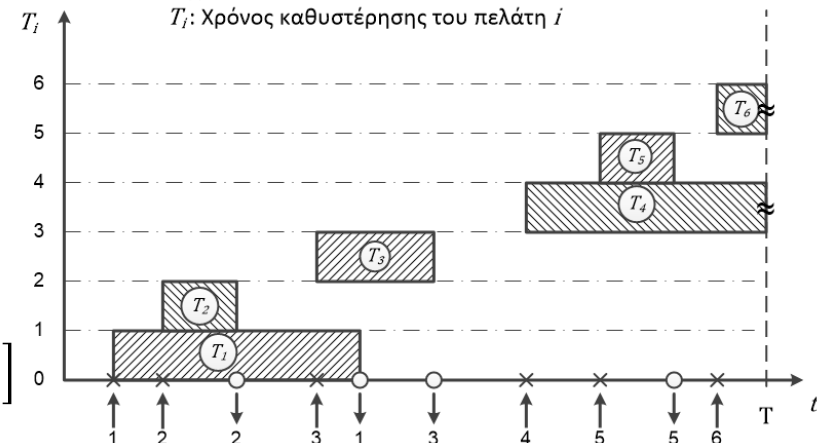
$$E(n) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{D(T)}{T} \times \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{D(T)} \sum_{i=1}^{D(T)} T_i \right] = \gamma E(T)$$



$A(t)$: Αριθμός αφίξεων πελατών στο $(0, t)$

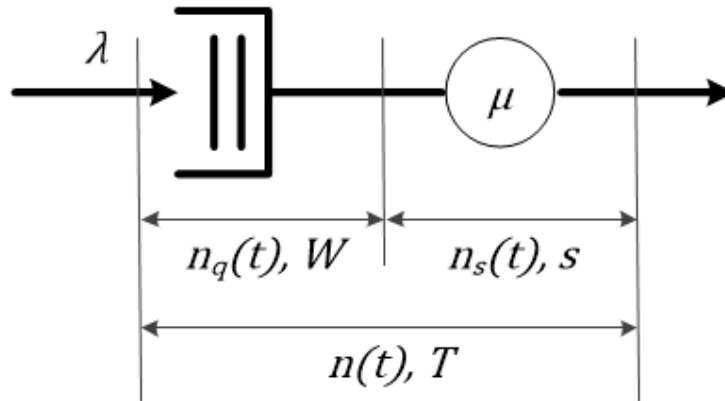
$D(t)$: Αριθμός αναχωρήσεων πελατών στο $(0, t)$

T_i : Χρόνος καθυστέρησης του πελάτη i



ΧΡΟΝΟΣ ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗΣ ΟΥΡΑΣ ΣΕ ΕΡΓΟΔΙΚΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΜΕ ΕΝΑ ΕΞΥΠΗΡΕΤΗΤΗ (**G/G/1**)

$$\gamma = \lambda (1 - P\{\text{blocking}\}) = \mu P\{n(t) > 0\} \leq \lambda, \gamma < \mu$$



$$n(t) = n_q(t) + n_s(t), \quad T = W + s$$

$$E(T) = \frac{E\{n(t)\}}{\gamma} = E(W) + E(s) = \frac{E\{n_q(t)\}}{\gamma} + \frac{E\{n_s(t)\}}{\gamma}$$

:

$$E\{n_s(t)\} = \gamma E(s) = \frac{\gamma}{\mu} = 0 \cdot P\{n(t) = 0\} + P\{n(t) > 0\} = P\{n(t) > 0\}$$

$$\Rightarrow \text{ο βαθμός χρησιμοποίησης του εξυπηρετητή } u = \frac{\gamma}{\mu} = P\{n(t) > 0\}$$

ΝΟΜΟΙ ΣΥΝΟΛΙΚΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ (1/2)

ΕΡΓΟΔΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ M/G/N/K: ΙΔΙΟΤΗΤΑ PASTA

- Συνολική Πιθανότητα Γεγονότος A σαν άθροισμα υπό Συνθήκη Πιθανοτήτων του συνόλου Διακριτής Μεταβλητής $n=k$:

$$P(A) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(A|n=k)P(n=k)$$

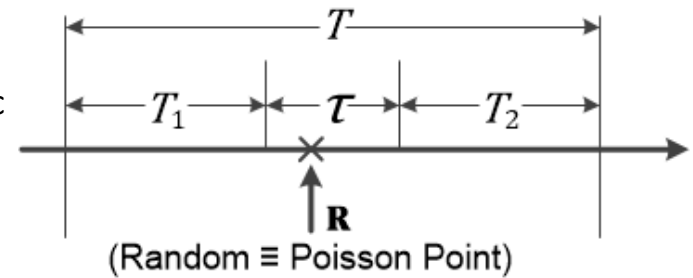
Συνολική Πιθανότητα Τυχαίας Μεταβλητής Y σαν Ολοκλήρωμα υπό Συνθήκη Πιθανοτήτων του συνόλου Συνεχούς Τυχαίας Μεταβλητής $X=x$:

$$P(Y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} P(Y|X=x)f_X dx, \quad E(Y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} E(Y|X=x)f_X dx = E_X[E(Y|X)]$$

- Θεωρείστε διάστημα T διαιρεμένο σε μη επικαλυπτόμενα υποδιαστήματα T_1, τ, T_2 και αφίξεις Poisson με μέσο ρυθμό λ αφίξεις/sec

Η πιθανότητα k αφίξεων σε διάστημα t είναι

$$P_k(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, E_t(k) = \sigma_t^2(k) = \lambda t$$



Αν υποθέσουμε πως έχουμε μια άφιξη Poisson R στο T με πιθανότητα $P_1(T) = e^{-\lambda T}(\lambda T)$. Η άφιξη αυτή θα συμβεί στο υποδιάστημα τ με πιθανότητα:

$$P\{1 \text{ άφιξη Poisson στο } \tau \mid 1 \text{ άφιξη Poisson στο } T\} = [P_0(T_1) \times P_1(\tau) \times P_0(T_2)]/P_1(T) = \frac{\lambda \tau e^{-\lambda(T_1+\tau+T_2)}}{\lambda T e^{-\lambda T}} = \frac{\tau}{T}$$

ΝΟΜΟΙ ΣΥΝΟΛΙΚΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ (2/2)

ΕΡΓΟΔΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ M/G/N/K: ΙΔΙΟΤΗΤΑ PASTA

- Συνολική Πιθανότητα Γεγονότος A σαν άθροισμα υπό Συνθήκη Πιθανοτήτων του συνόλου Διακριτής Μεταβλητής $n=k$:

$$P(A) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(A|n=k)P(n=k)$$

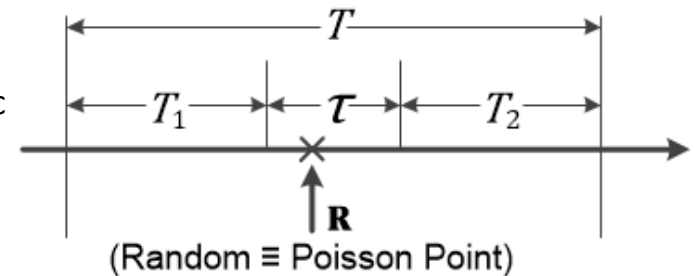
Συνολική Πιθανότητα Τυχαίας Μεταβλητής Y σαν Ολοκλήρωμα υπό Συνθήκη Πιθανοτήτων του συνόλου Συνεχούς Τυχαίας Μεταβλητής $X=x$:

$$P(Y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} P(Y|X=x)f_X dx, \quad E(Y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} E(Y|X=x)f_X dx = E_X[E(Y|X)]$$

- Θεωρείστε διάστημα T διαιρεμένο σε μη επικαλυπτόμενα υποδιαστήματα T_1, τ, T_2 και αφίξεις Poisson με μέσο ρυθμό λ αφίξεις/sec

Η πιθανότητα k αφίξεων σε διάστημα t είναι

$$P_k(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad E_t(k) = \sigma_t^2(k) = \lambda t$$



Αν υποθέσουμε πως έχουμε μια άφιξη Poisson R στο T με πιθανότητα $P_1(T) = e^{-\lambda T}(\lambda T)$. Η άφιξη αυτή θα συμβεί στο υποδιάστημα τ με πιθανότητα:

$$P\{1 \text{ άφιξη Poisson στο } \tau \mid 1 \text{ άφιξη Poisson στο } T\} = [P_0(T_1) \times P_1(\tau) \times P_0(T_2)]/P_1(T) = \frac{\lambda \tau e^{-\lambda(T_1+\tau+T_2)}}{\lambda T e^{-\lambda T}} = \frac{\tau}{T}$$

Οι αφίξεις Poisson έχουν τη συμπεριφορά τυχαίων αφίξεων (**Poisson Arrivals ~ Random Arrivals**)

Ιδιότητα PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages): Η **εργοδική** κατανομή (και ο μέσος όρος) της κατάστασης S ουράς **M/G/N/K** (εφόσον υπάρχει) εκτιμάται σαν ο μακροχρόνιος λόγος του συνολικού χρόνου τ_S που η κατάσταση έχει την συγκεκριμένη τιμή S προς το συνολικό διάστημα παρατήρησης T . **Οι εκτιμήσεις αυτές μπορεί να προκύψουν από καταγραφή της κατάστασης σε χρονικά σημεία αφίξεων Poisson με ενιαίο ρυθμό λ :**

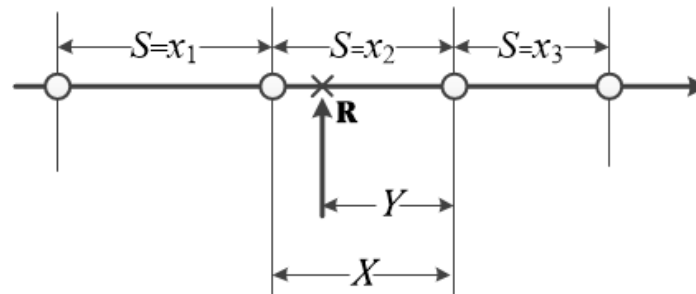
$$P\{n(t) = S\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\tau_S}{T} = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{A_S}{A} \cong \frac{\text{Αρ. Αφίξεων Poisson όταν } n(t) = S, \text{ στο συνολικό διάστημα } \tau_S}{\text{Αρ. Αφίξεων Poisson στο συνολικό διάστημα } T}$$

ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΑΝΑΝΕΩΣΗΣ

Renewal Theory: Basic Definitions

- Στατιστικά Μοντέλα Χρόνου Ζωής (**Life-Time**), Αποτυχίας (**Failure-Times**), Αποκατάστασης (**Repair-Times**)
- Βασική παραδοχή: Τα διαστήματα μεταξύ διαδοχικών Σημείων Ανανέωσης (**renewals** που ορίζουν το Χρόνο Ζωής) είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές S με τιμές $x \geq 0$, ανεξάρτητες μεταξύ τους, με την ίδια κατανομή $F_S(x)$ (**i.i.d. - independent & identically distributed random variables**), συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_S(x)$, μέση τιμή $E(S)$ και διασπορά $\sigma_S^2 = E(S^2) - [E(S)]^2$:

$$P\{S \in (x - dx, x)\} = f_S(x)dx, F_S(x) = P(S \leq x) = \int_{t=0}^x f_S(t)dt, E(S) = \int_{t=0}^{\infty} t f_S(t)dt, E(S^2) = \int_{t=0}^{\infty} t^2 f_S(t)dt$$



- Ένας άσχετος παρατηρητής του συστήματος σε τυχαίο χρονικό σημείο **R (Random Point)** που σύμφωνα με την ιδιότητα **PASTA** ισοδυναμεί με τυχαία άφιξη **Poisson**) έχει πιθανότητα να βρεθεί σε διάστημα X με προτίμηση ανάλογη με το μέγεθος του διαστήματος x . Η απόσταση Y από το σημείο αυτό μέχρι το επόμενο renewal αποτελεί τον Υπολειπόμενο Χρόνο Ζωής (**Residual Life**)
- Renewal Paradox:** Η τυχαία μεταβλητή X (**το μέγεθος του διαστήματος τυχαίας επιλογής**) έχει πυκνότητα πιθανότητας $f_X(x)$ διαφορετική από την $f_S(x)$

$$P\{R \in x | S=x\} = K \cdot x \quad (\text{τυχαία επιλογή ανάλογη με το μέγεθος του διαστήματος } x)$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{t=0}^x P\{R \in t | S=t\} f_S(t)dt = \int_{t=0}^x K \cdot t \cdot f_S(t)dt$$

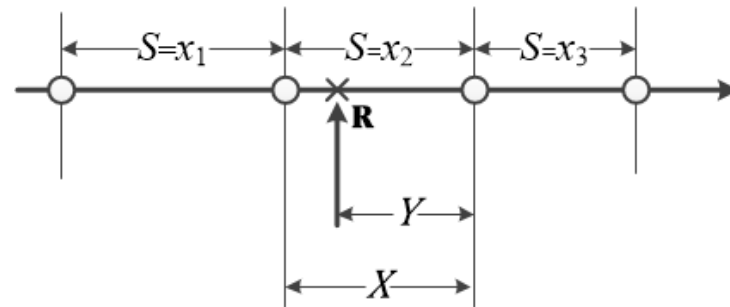
$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = K \cdot x \cdot f_S(x), \quad \int_{x=0}^{\infty} f_X(x)dx = 1 = K \cdot \int_{x=0}^{\infty} x f_S(x)dx \Rightarrow K = 1/E(S) \text{ και τελικά}$$

$$f_X(x) = x f_S(x) / E(S), \quad E(X) = E(S^2) / E(S)$$

ΥΠΟΛΕΙΠΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ ΖΩΗΣ

Residual Life & Renewal Paradox

- Επιλογή διαστήματος $X = x$ από παρατηρητή που εμφανίζεται σε σημείο Poisson $\mathbf{R}$: $f_X(x) = \frac{x f_S(x)}{E(S)}$
- Ο Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής είναι τυχαία μεταβλητή Y με πυκνότητα πιθανότητας $f_Y(y)$
- $P\{Y \in (y - dy, y) | X=x\} = \frac{P\{\mathbf{R} \in dy\}}{P\{\mathbf{R} \in x\}} = \frac{K \cdot dy}{K \cdot x} = dy/x$
και από τον τύπο της συνολικής πιθανότητας



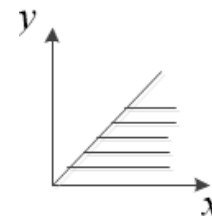
$$P\{Y \in (y - dy, y)\} = f_Y(y)dy = \int_{x=y}^{\infty} \frac{dy}{x} f_X(x)dx = \int_{x=y}^{\infty} \frac{f_S(x)}{E(S)} dy dx = \frac{dy}{E(S)} \int_{x=y}^{\infty} f_S(x) dx = \frac{1 - F_S(y)}{E(S)} dy \Rightarrow$$

$$f_Y(y) = \frac{1 - F_S(y)}{E(S)}$$

- Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής (**Mean Residual Life**):

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{y=0}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_{y=0}^{\infty} y \frac{1 - F_S(y)}{E(S)} dy = \frac{1}{E(S)} \int_{y=0}^{\infty} \left\{ y \int_{x=y}^{\infty} f_S(x) dx \right\} dy \\ &= \frac{1}{E(S)} \int_{x=0}^{\infty} f_S(x) \left\{ \int_{y=0}^x y dy \right\} dx = \frac{1}{E(S)} \int_{x=0}^{\infty} f_S(x) \frac{x^2}{2} dx = \frac{E(S^2)}{2E(S)} = \frac{\sigma_S^2 + [E(S)]^2}{2E(S)} \end{aligned}$$

$$E(Y) = \frac{E(S^2)}{2E(S)} = \frac{\sigma_S^2 + [E(S)]^2}{2E(S)} \geq \frac{E(S)}{2}$$



Renewal Paradox: Τυχαία ενδιάμεση παρατήρηση $\mathbf{R}$ «προτιμά» κατά μέσο όρο μεγάλα διαστήματα S

- Για **σταθερά** διαστήματα S : $E(S) = S = 1/\mu$, $\sigma_S^2 = 0$, $E(Y) = S/2 = 1/(2\mu)$ και η μέση τιμή του «προτιμώμενου» διαστήματος είναι $E(X) = E(S)$ (**αναμενόμενο**, χωρίς προκαταλήψεις λόγω απολύτως προβλέψιμου S)
- Για **εκθετικά** διαστήματα S : $E(S) = 1/\mu$, $\sigma_S^2 = 1/\mu^2$, $E(Y) = E(S) = 1/\mu$ (ιδιότητα **έλλειψης μνήμης εκθετικής κατανομής**) και $E(X) = 2E(S) = 2/\mu$ (**διπλάσιο της μέσης τιμής** $E(S)$ με προκατάληψη λόγω απρόβλεπτου S)

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ & ΡΟΠΟΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Moment Generating Functions - MGF

Διακριτές ακέραιες τυχαίες μεταβλητές n με τιμές $k = 0, 1, 2, \dots$ και πιθανότητες $p_k = P(n = k)$

- Ορίζουμε την **Ροπογεννήτρια Συνάρτηση (MGF)** σαν τον μετασχηματισμό z

$$G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, |z| \leq 1,$$

- Για $|z|=1$, $G_n(1) = 1$ και οι παράγωγοί της MGF ως προς z δίνουν τις ροπές της n :

$$G_n(1)' = E(n), G_n(1)^{(m)} = E(n^m)$$

Παράδειγμα: Αφίξεις Poisson k με ρυθμό λ σε διάστημα t με πιθανότητες $P_k(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} (\lambda t)^k / k! = e^{-\lambda t(1-z)}$$

$$G_n(1) = 1, G_n(1)' = E(n) = \lambda t, G_n(1)'' = E(n^2) = \lambda t + (\lambda t)^2, \sigma_n^2 = E(n^2) - [E(n)]^2 = \lambda t$$

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές X με τιμές $t \geq 0$ και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(t)$

$$P\{X \in (t - \Delta t, t)\} = f_X(t)\Delta t, \quad F_X(t) = P(X \leq t) = \int_{\tau=0}^t f_X(\tau) d\tau$$

- Ορίζουμε τον μετασχηματισμό **Laplace** $F_X(p)$ της $f_X(t)$

$$F_X(p) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-pt} f_X(t) dt$$

- Για $p = 0$ έχουμε αντίστοιχα $F_X(0) = 1$ και οι παράγωγοι ως προς p για $p = 0$ δίνουν τις ροπές της X :

$$F_X(0)' = -E(X), F_X(0)^{(m)} = (-1)^m E(X^m)$$

Παράδειγμα: Εκθετική μεταβλητή X με μέσο όρο $1/\mu$, $f_X(t) = \mu e^{-\mu t}$, $t \geq 0$

$$F_X(p) = \mu / (\mu + p)$$

$$F_X(0) = 1, F_X(p)' = -\mu / (\mu + p)^2, E(X) = -F_X(0)' = 1/\mu, F_X(p)'' = 2\mu / (\mu + p)^3, E(X^2) = F_X(0)'' = 2/\mu^2$$

Παράδειγμα: X με σταθερή τιμή $1/\mu$, $f_X(t) = \delta(t - 1/\mu)$

$$F_X(p) = e^{-p/\mu}, F_X(0) = 1, F_X(p)' = -(1/\mu)e^{-p/\mu}, E(X) = -F_X(0)' = 1/\mu$$

$$F_X(p)'' = 1/\mu^2 e^{-p/\mu}, E(X^2) = F_X(0)'' = 1/\mu^2, \sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = 0$$

- Άθροισμα ανεξαρτήτων** τυχαίων μεταβλητών $F_{X+Y}(p) = F_X(p) \cdot F_Y(p)$

12^ο Μάθημα

Ανάλυση Ουράς Αναμονής M/G/1

Αρχές Ανάλυσης Ουράς M/G/1

Ενσωματωμένη Αλυσίδα Markov (Embedded Markov Chain)

Τύποι Pollaczek - Khinchin (P-K) για Ουρές M/G/1

Μέσες Τιμές Επίδοσης M/G/1

ΝΟΜΟΙ ΣΥΝΟΛΙΚΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ (1/2) (επανάληψη)

ΕΡΓΟΔΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ Μ/Γ/Ν/Κ: ΙΔΙΟΤΗΤΑ PASTA

- Συνολική Πιθανότητα Γεγονότος A σαν άθροισμα υπό Συνθήκη Πιθανοτήτων του συνόλου Διακριτής Μεταβλητής $n=k$:

$$P(A) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(A|n=k)P(n=k)$$

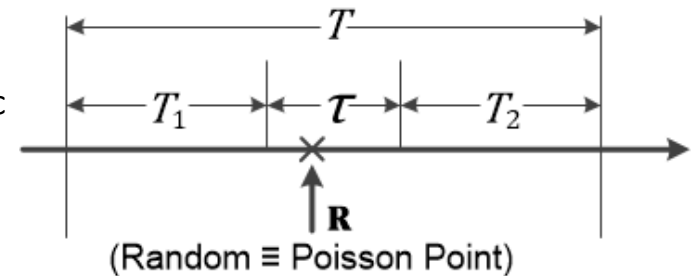
Συνολική Πιθανότητα Τυχαίας Μεταβλητής Y σαν Ολοκλήρωμα υπό Συνθήκη Πιθανοτήτων του συνόλου Συνεχούς Τυχαίας Μεταβλητής $X=x$:

$$P(Y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} P(Y|X=x)f_X dx, \quad E(Y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} E(Y|X=x)f_X dx = E_X[E(Y|X)]$$

- Θεωρείστε διάστημα T διαιρεμένο σε μη επικαλυπτόμενα υποδιαστήματα T_1, τ, T_2 και αφίξεις Poisson με μέσο ρυθμό λ αφίξεις/sec

Η πιθανότητα k αφίξεων σε διάστημα t είναι

$$P_k(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad E_t(k) = \sigma_t^2(k) = \lambda t$$



Αν υποθέσουμε πως έχουμε μια άφιξη Poisson R στο T με πιθανότητα $P_1(T) = e^{-\lambda T}(\lambda T)$. Η άφιξη αυτή θα συμβεί στο υποδιάστημα τ με πιθανότητα:

$$P\{1 \text{ άφιξη Poisson στο } \tau \mid 1 \text{ άφιξη Poisson στο } T\} = [P_0(T_1) \times P_1(\tau) \times P_0(T_2)]/P_1(T) = \frac{\lambda \tau e^{-\lambda(T_1+\tau+T_2)}}{\lambda T e^{-\lambda T}} = \frac{\tau}{T}$$

ΝΟΜΟΙ ΣΥΝΟΛΙΚΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ (2/2) (επανάληψη)

ΕΡΓΟΔΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ M/G/N/K: ΙΔΙΟΤΗΤΑ PASTA

- Συνολική Πιθανότητα Γεγονότος A σαν άθροισμα υπό Συνθήκη Πιθανοτήτων του συνόλου Διακριτής Μεταβλητής $n=k$:

$$P(A) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(A|n=k)P(n=k)$$

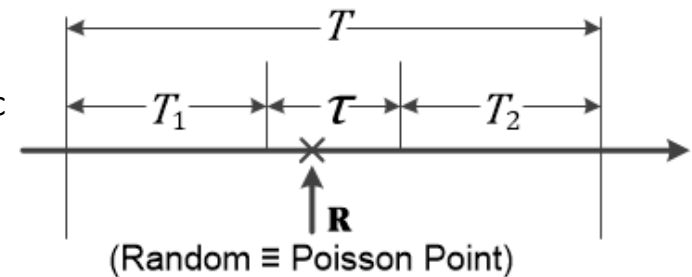
Συνολική Πιθανότητα Τυχαίας Μεταβλητής Y σαν Ολοκλήρωμα υπό Συνθήκη Πιθανοτήτων του συνόλου Συνεχούς Τυχαίας Μεταβλητής $X=x$:

$$P(Y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} P(Y|X=x)f_X dx, \quad E(Y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} E(Y|X=x)f_X dx = E_X[E(Y|X)]$$

- Θεωρείστε διάστημα T διαιρεμένο σε μη επικαλυπτόμενα υποδιαστήματα T_1, τ, T_2 και αφίξεις Poisson με μέσο ρυθμό λ αφίξεις/sec

Η πιθανότητα k αφίξεων σε διάστημα t είναι

$$P_k(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad E_t(k) = \sigma_t^2(k) = \lambda t$$



Αν υποθέσουμε πως έχουμε μια άφιξη Poisson R στο T με πιθανότητα $P_1(T) = e^{-\lambda T}(\lambda T)$. Η άφιξη αυτή θα συμβεί στο υποδιάστημα τ με πιθανότητα:

$$P\{1 \text{ άφιξη Poisson στο } \tau \mid 1 \text{ άφιξη Poisson στο } T\} = [P_0(T_1) \times P_1(\tau) \times P_0(T_2)]/P_1(T) = \frac{\lambda \tau e^{-\lambda(T_1+\tau+T_2)}}{\lambda T e^{-\lambda T}} = \frac{\tau}{T}$$

Οι αφίξεις Poisson έχουν τη συμπεριφορά τυχαίων αφίξεων (**Poisson Arrivals $\sim$ Random Arrivals**)

Ιδιότητα PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages): Η εργοδική κατανομή (και ο μέσος όρος) της κατάστασης S ουράς **M/G/N/K** (εφόσον υπάρχει) εκτιμάται σαν ο μακροχρόνιος λόγος του συνολικού χρόνου τ_S που η κατάσταση έχει την συγκεκριμένη τιμή S προς το συνολικό διάστημα παρατήρησης T . **Οι εκτιμήσεις αυτές μπορεί να προκύψουν από καταγραφή της κατάστασης σε χρονικά σημεία αφίξεων Poisson με ενιαίο ρυθμό λ :**

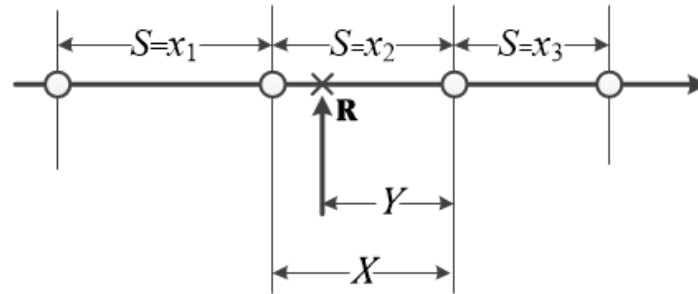
$$P\{n(t) = S\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\tau_S}{T} = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{A_S}{A} \cong \frac{\text{Αρ. Αφίξεων Poisson όταν } n(t) = S, \text{ στο συνολικό διάστημα } \tau_S}{\text{Αρ. Αφίξεων Poisson στο συνολικό διάστημα } T}$$

ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΑΝΑΝΕΩΣΗΣ (επανάληψη)

Renewal Theory: Basic Definitions

- Στατιστικά Μοντέλα Χρόνου Ζωής (**Life-Time**), Αποτυχίας (**Failure-Times**), Αποκατάστασης (**Repair-Times**)
- Βασική παραδοχή: Τα διαστήματα μεταξύ διαδοχικών Σημείων Ανανέωσης (**renewals** που ορίζουν το Χρόνο Ζωής) είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές S με τιμές $x \geq 0$, ανεξάρτητες μεταξύ τους, με την ίδια κατανομή $F_S(x)$ (**i.i.d. - independent & identically distributed random variables**), συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_S(x)$, μέση τιμή $E(S)$ και διασπορά $\sigma_S^2 = E(S^2) - [E(S)]^2$:

$$P\{S \in (x - dx, x)\} = f_S(x)dx, F_S(x) = P(S \leq x) = \int_{t=0}^x f_S(t)dt, E(S) = \int_{t=0}^{\infty} t f_S(t)dt, E(S^2) = \int_{t=0}^{\infty} t^2 f_S(t)dt$$



- Ένας άσχετος παρατηρητής του συστήματος σε τυχαίο χρονικό σημείο **R** (**Random Point** που σύμφωνα με την ιδιότητα **PASTA** ισοδυναμεί με τυχαία άφιξη **Poisson**) έχει πιθανότητα να βρεθεί σε διάστημα X με προτίμηση ανάλογη με το μέγεθος του διαστήματος x . Η απόσταση Y από το σημείο αυτό μέχρι το επόμενο renewal αποτελεί τον Υπολειπόμενο Χρόνο Ζωής (**Residual Life**)
- Renewal Paradox:** Η τυχαία μεταβλητή X (**το μέγεθος του διαστήματος τυχαίας επιλογής**) έχει πυκνότητα πιθανότητας $f_X(x)$ διαφορετική από την $f_S(x)$

$$P\{R \in x | S=x\} = K \cdot x \quad (\text{τυχαία επιλογή ανάλογη με το μέγεθος του διαστήματος } x)$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{t=0}^x P\{R \in t | S=t\} f_S(t)dt = \int_{t=0}^x K \cdot t \cdot f_S(t)dt$$

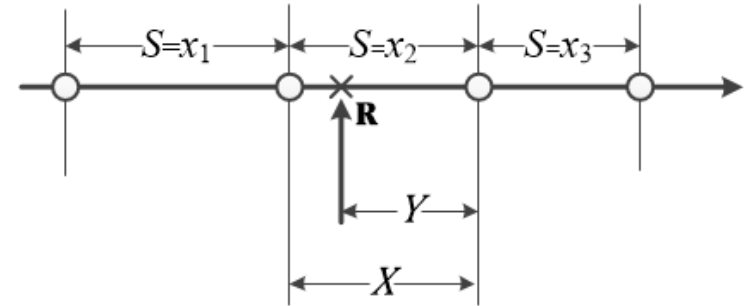
$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = K \cdot x \cdot f_S(x), \quad \int_{x=0}^{\infty} f_X(x)dx = 1 = K \cdot \int_{x=0}^{\infty} x f_S(x)dx \Rightarrow K = 1/E(S) \text{ και τελικά}$$

$$f_X(x) = x f_S(x)/E(S), \quad E(X) = E(S^2)/E(S)$$

ΥΠΟΛΕΙΠΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ ΖΩΗΣ (επανάληψη)

Residual Life & Renewal Paradox

- Επιλογή διαστήματος $X = x$ από παρατηρητή που εμφανίζεται σε σημείο Poisson $\mathbf{R}$: $f_X(x) = \frac{x f_S(x)}{E(S)}$
- Ο Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής είναι τυχαία μεταβλητή Y με πυκνότητα πιθανότητας $f_Y(y)$
- $P\{Y \in (y - dy, y) | X=x\} = \frac{P\{\mathbf{R} \in dy\}}{P\{\mathbf{R} \in x\}} = \frac{K \cdot dy}{K \cdot x} = dy/x$
και από τον τύπο της συνολικής πιθανότητας



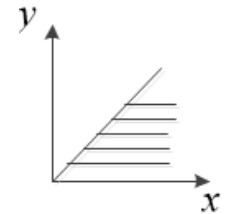
$$P\{Y \in (y - dy, y)\} = f_Y(y)dy = \int_{x=y}^{\infty} \frac{dy}{x} f_X(x)dx = \int_{x=y}^{\infty} \frac{f_S(x)}{E(S)} dy dx = \frac{dy}{E(S)} \int_{x=y}^{\infty} f_S(x) dx = \frac{1 - F_S(y)}{E(S)} dy \Rightarrow$$

$$f_Y(y) = \frac{1 - F_S(y)}{E(S)}$$

- Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής (**Mean Residual Life**):

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{y=0}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_{y=0}^{\infty} y \frac{1 - F_S(y)}{E(S)} dy = \frac{1}{E(S)} \int_{y=0}^{\infty} \left\{ y \int_{x=y}^{\infty} f_S(x) dx \right\} dy \\ &= \frac{1}{E(S)} \int_{x=0}^{\infty} f_S(x) \left\{ \int_{y=0}^x y dy \right\} dx = \frac{1}{E(S)} \int_{x=0}^{\infty} f_S(x) \frac{x^2}{2} dx = \frac{E(S^2)}{2E(S)} = \frac{\sigma_S^2 + [E(S)]^2}{2E(S)} \end{aligned}$$

$$E(Y) = \frac{E(S^2)}{2E(S)} = \frac{\sigma_S^2 + [E(S)]^2}{2E(S)} \geq \frac{E(S)}{2}$$



Renewal Paradox: Τυχαία ενδιάμεση παρατήρηση $\mathbf{R}$ «προτιμά» κατά μέσο όρο μεγάλα διαστήματα S

- Για **σταθερά** διαστήματα S : $E(S) = S = 1/\mu$, $\sigma_S^2 = 0$, $E(Y) = S/2 = 1/(2\mu)$ και η μέση τιμή του «προτιμώμενου» διαστήματος είναι $E(X) = E(S)$ (**αναμενόμενο**, χωρίς προκαταλήψεις λόγω απολύτως προβλέψιμου S)
- Για **εκθετικά** διαστήματα S : $E(S) = 1/\mu$, $\sigma_S^2 = 1/\mu^2$, $E(Y) = E(S) = 1/\mu$ (ιδιότητα **έλλειψης μνήμης εκθετικής κατανομής**) και $E(X) = 2E(S) = 2/\mu$ (**διπλάσιο της μέσης τιμής** $E(S)$ με προκατάληψη λόγω απρόβλεπτου S)

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ & ΡΟΠΟΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Moment Generating Functions - MGF (επανάληψη)

Διακριτές ακέραιες τυχαίες μεταβλητές n με τιμές $k = 0, 1, 2, \dots$ και πιθανότητες $p_k = P(n = k)$

- Ορίζουμε την **Ροπογεννήτρια Συνάρτηση (MGF)** σαν τον μετασχηματισμό z
 $G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, |z| \leq 1,$
- Για $|z|=1$, $G_n(1) = 1$ και οι παράγωγοί της MGF ως προς z δίνουν τις ροπές της n :
 $G_n(1)' = E(n), G_n(1)^{(m)} = E(n^m)$

Παράδειγμα: Αφίξεις Poisson k με ρυθμό λ σε διάστημα t με πιθανότητες $P_k(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}, k = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} (\lambda t)^k / k! = e^{-\lambda t(1-z)}$$

$$G_n(1) = 1, G_n(1)' = E(n) = \lambda t, G_n(1)'' = E(n^2) = \lambda t + (\lambda t)^2, \sigma_n^2 = E(n^2) - [E(n)]^2 = \lambda t$$

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές X με τιμές $t \geq 0$ και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(t)$

$$P\{X \in (t - \Delta t, t)\} = f_X(t)\Delta t, \quad F_X(t) = P(X \leq t) = \int_{\tau=0}^t f_X(\tau) d\tau$$

- Ορίζουμε τον μετασχηματισμό **Laplace** $F_X(p)$ της $f_X(t)$
 $F_X(p) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-pt} f_X(t) dt$
- Για $p = 0$ έχουμε αντίστοιχα $F_X(0) = 1$ και οι παράγωγοι ως προς p για $p = 0$ δίνουν τις ροπές της X :
 $F_X(0)' = -E(X), F_X(0)^{(m)} = (-1)^m E(X^m)$

Παράδειγμα: Εκθετική μεταβλητή X με μέσο όρο $1/\mu, f_X(t) = \mu e^{-\mu t}, t \geq 0$

$$F_X(p) = \mu / (\mu + p)$$

$$F_X(0) = 1, F_X(p)' = -\mu / (\mu + p)^2, E(X) = -F_X(0)' = 1/\mu, F_X(p)'' = 2\mu / (\mu + p)^3, E(X^2) = F_X(0)'' = 2/\mu^2$$

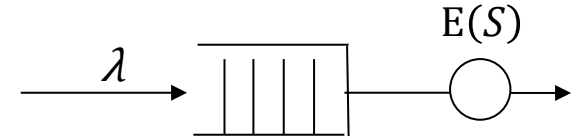
Παράδειγμα: X με σταθερή τιμή $1/\mu, f_X(t) = \delta(t - 1/\mu)$

$$F_X(p) = e^{-p/\mu}, F_X(0) = 1, F_X(p)' = -(1/\mu)e^{-p/\mu}, E(X) = -F_X(0)' = 1/\mu$$

$$F_X(p)'' = 1/\mu^2 e^{-p/\mu}, E(X^2) = F_X(0)'' = 1/\mu^2, \sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = 0$$

- Άθροισμα ανεξαρτήτων** τυχαίων μεταβλητών $F_{X+Y}(p) = F_X(p) \cdot F_Y(p)$

ΑΡΧΕΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΟΥΡΑΣ Μ/Γ/1 ΣΕ ΕΡΓΟΔΙΚΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ



- Αφίξεις **Poisson**: λ πελάτες/sec
- Ένας Εξυπηρετητής με χρόνους εξυπηρέτησης: **S i.i.d** με πυκνότητα πιθανότητας $f_S(t), t \geq 0$
 - $P\{S \in (t - \Delta t, t)\} = f_S(t)\Delta t, F_S(t) = P(S \leq t) = \int_{\tau=0}^t f_S(\tau)d\tau$
 - $E(S) = \int_{t=0}^{\infty} t f_S(t)dt, E(S^m) = \int_{t=0}^{\infty} t^m f_S(t)dt, \sigma_S^2 = E(S^2) - [E(S)]^2$
 - Άπειρο μήκος ουράς
 - Για ισορροπία πρέπει το σύστημα να αδειάζει άπειρες φορές, ή σε χρονικό ορίζοντα $T \rightarrow \infty$ να υπάρχουν αφίξεις Poisson σε χρονικά διαστήματα συνολικής διάρκειας $T_0 > 0$ που να το βρίσκουν άδειο: Αν ορίσουμε την **εργοδική πιθανότητα** $P_0 \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_0}{T}$, πρέπει $P_0 = 1 - \lambda \cdot E(S) > 0$ (**PASTA**) ή $\rho \triangleq \lambda \cdot E(S) < 1$ Erlang
- Η κατάσταση της ουράς σε τυχαία χρονική στιγμή παρατήρησης ή αφίξεως Poisson (από ιδιότητα **PASTA**) δίνεται πλήρως από το ζεύγος (i, r) όπου:
 - i : Αριθμός πελατών στο σύστημα
 - r : Υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης πελάτη στον εξυπηρετητή κατά τη τυχαία παρατήρηση, αν υπάρχει πελάτης στον εξυπηρετητή με πιθανότητα $1 - P_0 = \rho = \lambda \cdot E(S) < 1$
- Για τον υπολογισμό **εργοδικών πιθανοτήτων** του αριθμού πελατών $P_i \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_i}{T}$ απαιτείται υπολογισμός των χρονοσταθερών στάσιμων (**stationary**) πιθανοτήτων των καταστάσεων $P(i, r)$ σε τυχαία σημεία παρατήρησης (ή αφίξεων Poisson) και ολοκλήρωσή τους ως προς την συνθήκη r
- Απλούστερος τρόπος: Υπολογισμός των στάσιμων (**stationary**) πιθανοτήτων $\pi(i)$ σαν όριο της σχετικής συχνότητας παρουσίας i πελατών σε **Ενσωματωμένα Σημεία (Embedded Points)** στο χρόνο που ορίζεται **αμέσως μετά από κάθε αναχώρηση πελάτη**, οπότε με βεβαιότητα $r = 0$
- Η σχετική συχνότητα πελατών $P(i)$ μετά από κάθε αναχώρηση πελάτη ισούται με την σχετική συχνότητα πελατών που βλέπουν νέες αφίξεις Poisson στο σύστημα Μ/Γ/1 και λόγω **PASTA** δίνει τις **εργοδικές πιθανότητες**

$$P_i \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_i}{T} = \pi(i) \text{ και } P_0 = \pi(0) = 1 - \rho = 1 - \lambda \cdot E(S)$$

ΕΝΣΩΜΑΤΩΜΕΝΗ ΑΛΥΣΙΔΑ MARKOV ΓΙΑ ΟΥΡΑ Μ/Γ/1 (1/2)

Embedded Markov Chain – M/G/1

Αλυσίδα Markov:

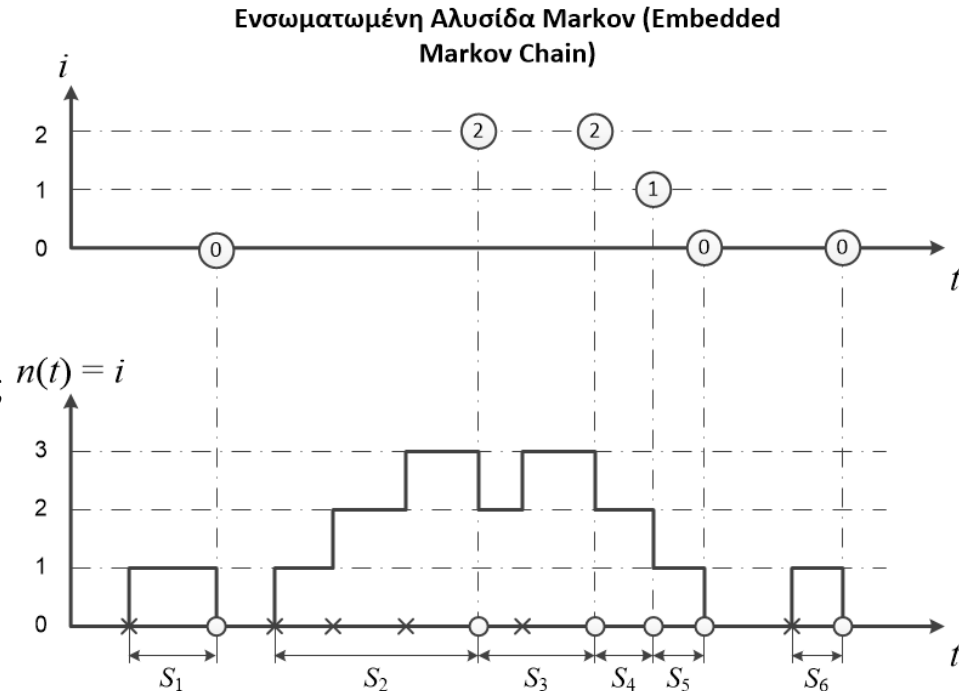
Στοχαστική Ανέλιξη Διακριτής Κατάστασης i με μεταβάσεις σε Διακριτό Χρόνο $t = t_k$ ανεξάρτητες από το παρελθόν

- **Διακριτές Καταστάσεις** $i = 0, 1, 2, \dots$ με πιθανότητα εμφάνισης $\pi_k(i)$ ύστερα από k βήματα δυνατών εξελίξεων (διαδοχικές μεταβάσεις) $k = 0, 1, 2, \dots$
Θεωρούμε πως όλες οι καταστάσεις είναι ανά δύο προσβάσιμες μετά από διαδοχικές μεταβάσεις
- **Εξέλιξη Κατάστασης:** Διαδοχικές μεταβάσεις σε διακριτά χρονικά σημεία (βήματα $k = 0, 1, 2, \dots$) οδηγούν τη κατάσταση από $j \rightarrow i$ με πιθανότητες $P(i|j)$ ανεξάρτητες από την προϊστορία του συστήματος (οι μεταβάσεις στο κάθε βήμα δεν επηρεάζονται από το παρελθόν) $\Rightarrow$

$$\pi_{k+1}(i) = \sum_{j=0}^{\infty} P(i|j) \pi_k(j), \quad \sum_i \pi_k(i) = 1$$

- Στάσιμες (**stationary**) πιθανότητες, αν υπάρχει σύγκλιση σε σταθερή κατάσταση (**steady-state**), προκύπτουν από τις εξισώσεις ισορροπίας για τις απείρως επισκέψιμες (**recurrent**) καταστάσεις:

$$\pi(i) \triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_k(i) \text{ και } \pi(i) = \sum_{j=0}^{\infty} P(i|j) \pi(j), \forall i$$



Εξέλιξη Αριθμού Πελατών στο Σύστημα Μ/Γ/1

ΕΝΣΩΜΑΤΩΜΕΝΗ ΑΛΥΣΙΔΑ MARKOV ΓΙΑ ΟΥΡΑ Μ/Γ/1 (2/2)

Embedded Markov Chain – M/G/1

Αλυσίδα Markov:

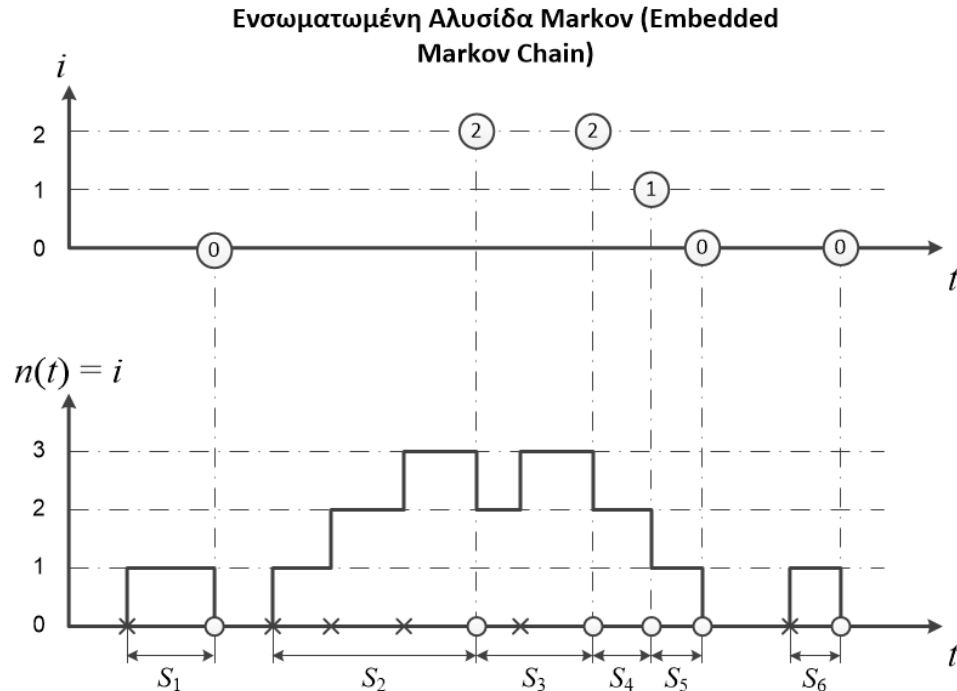
Στοχαστική Ανέλιξη Διακριτής Κατάστασης i με μεταβάσεις σε Διακριτό Χρόνο $t = t_k$ ανεξάρτητες από το παρελθόν

- **Διακριτές Καταστάσεις** $i = 0, 1, 2, \dots$ με πιθανότητα εμφάνισης $\pi_k(i)$ ύστερα από k βήματα δυνατών εξελίξεων (διαδοχικές μεταβάσεις) $k = 0, 1, 2, \dots$
Θεωρούμε πως όλες οι καταστάσεις είναι ανά δύο προσβάσιμες μετά από διαδοχικές μεταβάσεις
- **Εξέλιξη Κατάστασης:** Διαδοχικές μεταβάσεις σε διακριτά χρονικά σημεία (βήματα $k = 0, 1, 2, \dots$) οδηγούν τη κατάσταση από $j \rightarrow i$ με πιθανότητες $P(i|j)$ ανεξάρτητες από την προϊστορία του συστήματος (οι μεταβάσεις στο κάθε βήμα δεν επηρεάζονται από το παρελθόν) $\Rightarrow$

$$\pi_{k+1}(i) = \sum_{j=0}^{\infty} P(i|j) \pi_k(j), \quad \sum_i \pi_k(i) = 1$$

- Στάσιμες (**stationary**) πιθανότητες, αν υπάρχει σύγκλιση σε σταθερή κατάσταση (**steady-state**), προκύπτουν από τις εξισώσεις ισορροπίας για τις απείρως επισκέψιμες (**recurrent**) καταστάσεις:

$$\pi(i) \triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_k(i) \text{ και } \pi(i) = \sum_{j=0}^{\infty} P(i|j) \pi(j), \forall i$$



Εξέλιξη Αριθμού Πελατών στο Σύστημα Μ/Γ/1

Ενσωματωμένη Αλυσίδα Markov για Ανάλυση Εργοδικών Πιθανοτήτων Συστήματος Μ/Γ/1:

- Κατάσταση: Αριθμός πελατών (πληθυσμός) στο σύστημα i **αμέσως μετά από αναχώρηση πελάτη**
- Μεταβάσεις: Σε ενσωματωμένα χρονικά σημεία ορισμένα αμέσως μετά από αναχώρηση πελάτη
- Στάσιμες πιθανότητες $\pi(i)$ της ενσωματωμένης αλυσίδας Markov: Ίσες λόγω **ισορροπίας** με τη σχετική συχνότητα πληθυσμού i **αμέσως πριν από άφιξη Poisson** και λόγω **PASTA** ίσες με τις εργοδικές πιθανότητες: $\pi(i) = P_i \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_i}{T}$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΝΣΩΜΑΤΩΜΕΝΗΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ MARKOV (1/3)

Υπολογισμός Διανύσματος Στάσιμων Πιθανοτήτων $\pi = [\pi(0), \pi(1), \pi(2), \dots]^T$

$P(i|j)$: Πιθανότητες Μετάβασης $j \rightarrow i$ σε ενσωματωμένα χρονικά σημεία ορισμένα αμέσως μετά από αναχώρηση

Εξισώσεις Ισορροπίας Μεταβάσεων στη Σταθερή Κατάσταση : $\pi(i) = \sum_{j=0}^{\infty} P(i|j) \pi(j)$, $\sum_i \pi(i) = 1 \forall i$

Ορίζουμε $\alpha_k \triangleq P\{k \text{ αφίξεις Poisson στο διάστημα εξυπηρέτησης πελάτη } S = t\}$

$$= \int_{t=0}^{\infty} [e^{-\lambda t} (\lambda t)^k / k!] f_S(t) dt \quad (\text{ιδιότητα } \textcolor{red}{\text{συνολικής πιθανότητας}})$$

- $\alpha_0 = P(0|0) = P(0|1) = P(1|2) = P(2|3) = P((i-1)|i), i \geq 3$
- $\alpha_1 = P(1|0) = P(1|1) = P(2|2) = P(3|3) = P(i|i), i \geq 3$
- $\alpha_2 = P(2|0) = P(2|1) = P(3|2) = P(4|3) = P((i+1)|i), i \geq 3$
- $\alpha_k = P(k|0) = P(k|1) = P((k+1)|2) = P((k+2)|3) = P((k+i-1)|i), i \geq 3$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(i|0) = P(i|1) = \alpha_i & \text{για κάθε } i \\ P(i|j) = \alpha_{i-j+1} & \text{για } j > 1, i \geq j-1 \\ P(i|j) = 0 & \text{για } i < j-1 \end{cases}$$

Παράδειγμα M/M/1:

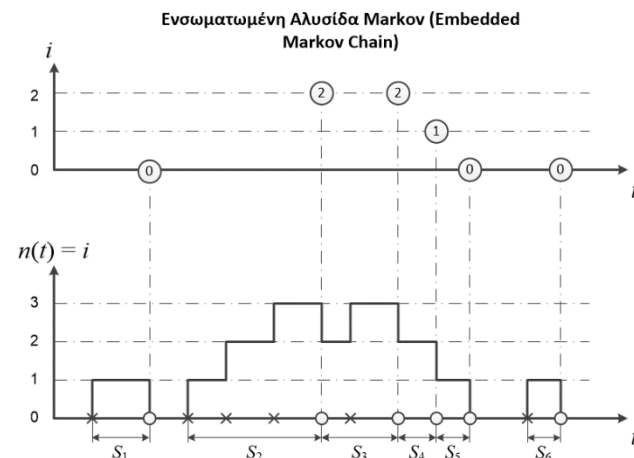
Αν η S έχει εκθετική κατανομή $f_S(t) = \mu e^{-\mu t}, t \geq 0$

$$\alpha_0 = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \mu e^{-\mu t} dt = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

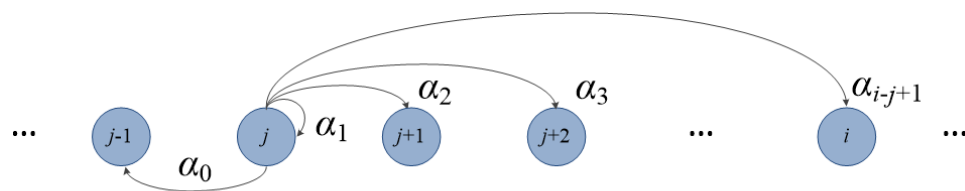
$$\alpha_1 = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\lambda t} (\lambda t) \mu e^{-\mu t} dt = \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu}$$

$$\alpha_2 = \int_{t=0}^{\infty} \{e^{-\lambda t} (\lambda t)^2 / 2\} \mu e^{-\mu t} dt = \frac{\lambda^2 \mu}{\lambda + \mu}$$

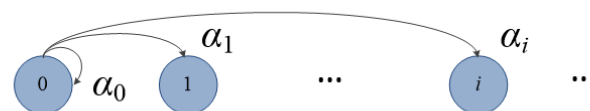
...



Εξέλιξη Αριθμού Πελατών στο Σύστημα M/G/1



Από Κατάσταση $j > 0$



Από Κατάσταση $j = 0$

**Ενδεικτικές Πιθανότητες Μετάβασης
Ενσωματωμένης Αλυσίδας Markov**

ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΝΣΩΜΑΤΩΜΕΝΗΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ MARKOV (2/3)

Υπολογισμός Διανύσματος Στάσιμων Πιθανοτήτων $\pi = [\pi(0), \pi(1), \pi(2), \dots]^T$

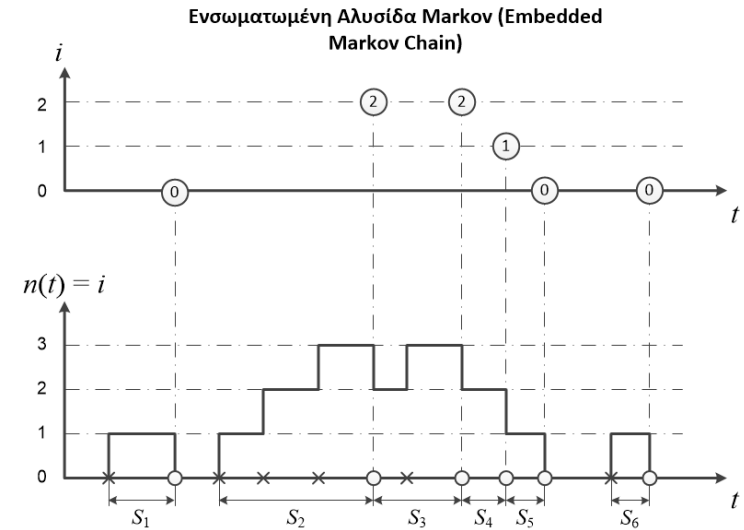
Εξισώσεις Ισορροπίας για τις στάσιμες πιθανότητες π της Ενσωματωμένης Αλυσίδας Markov

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi(0) \\ \pi(1) \\ \pi(2) \\ \pi(3) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_0 & 0 & 0 & \dots \\ \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & \dots \\ \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \dots \\ \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi(0) \\ \pi(1) \\ \pi(2) \\ \pi(3) \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \pi$$

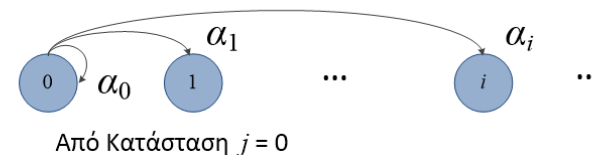
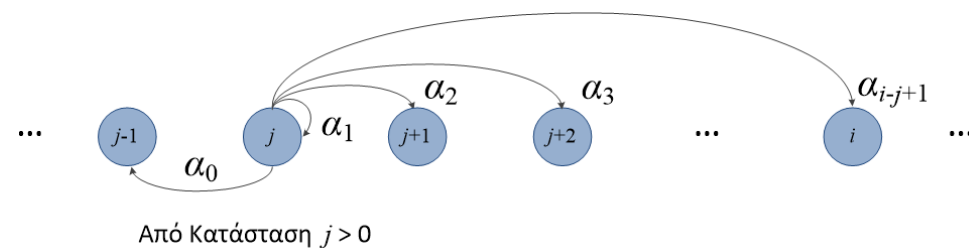
$$\pi(i) = \alpha_i \pi(0) + \alpha_i \pi(1) + \alpha_{i-1} \pi(2) + \dots + \alpha_2 \pi(i-1) + \alpha_1 \pi(i) + \alpha_0 \pi(i+1)$$

$$= \alpha_i \pi(0) + \sum_{j=0}^i \alpha_j \pi(i+1-j), \quad \forall i$$

$$\pi(0) + \pi(1) + \pi(2) + \dots = \sum_i \pi(i) = 1$$



Εξέλιξη Αριθμού Πελατών στο Σύστημα M/G/1



Ενδεικτικές Πιθανότητες Μετάβασης
Ενσωματωμένης Αλυσίδας Markov

ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΝΣΩΜΑΤΩΜΕΝΗΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ MARKOV (3/3)

Υπολογισμός Μετασχηματισμού z (**Moment Generating Function - MGF**) του Πληθυσμού i Συστήματος M/G/1

$$\Pi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi(i) z^i, |z| \leq 1$$

σαν συνάρτηση του Μετασχηματισμού z των α_i :

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k, |z| \leq 1$$

$$\pi(i) = \alpha_i \pi(0) + \sum_{j=0}^i \alpha_j \pi(i+1-j)$$

$$\begin{aligned} \Pi(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} \pi(i) z^i = \frac{1}{z} \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^i \alpha_j z^j \pi(i+1-j) z^{i+1-j} \right\} + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \pi(0) z^i = \frac{1}{z} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=j}^{\infty} \alpha_j z^j \pi(i+1-j) z^{i+1-j} \right\} + \pi(0) A(z) \\ &= \frac{1}{z} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j z^j \left\{ \sum_{i=j}^{\infty} \pi(i+1-j) z^{i+1-j} \right\} + \pi(0) A(z) = \frac{1}{z} A(z) [\Pi(z) - \pi(0)] + \pi(0) A(z) \end{aligned}$$

Από την ιδιότητα **PASTA** $\pi(0) = P_0 = 1 - \rho = 1 - \lambda \cdot E(S) \Rightarrow$

$$\Pi(z) = \frac{\pi(0) A(z) (1 - z^{-1})}{1 - z^{-1} A(z)} = \frac{(1 - \rho) A(z) (1 - z)}{A(z) - z}$$

- Υπολογισμός $A(z)$ μέσω **συνολικής πιθανότητας** αριθμού αφίξεων Poisson σε χρόνο εξυπηρέτησης S :

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_{t=0}^{\infty} P(k|S=t) f_S(t) dt \right] z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} [e^{-\lambda t} (\lambda z t)^k / k!] f_S(t) dt = \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\lambda - \lambda z)t} f_S(t) dt = F_S(\lambda - \lambda z)$$

Τύπος **Pollaczek - Khinchin (P-K)** για την MGF Πληθυσμού i Εργοδικής Ουράς M/G/1

$$\Pi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi(i) z^i = \frac{(1 - \rho) F_S(\lambda - \lambda z) (1 - z)}{F_S(\lambda - \lambda z) - z}, \quad |z| \leq 1$$

Παράδειγμα M/M/1:

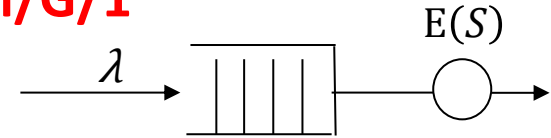
Αν η S έχει εκθετική κατανομή $f_S(t) = \mu e^{-\mu t}, t \geq 0$

$A(z) = F_S(\lambda - \lambda z) = \mu / (\mu + \lambda - \lambda z)$, $\Pi(z) = (1 - \rho) / (1 - \rho z)$ και $\pi(i) = (1 - \rho) \rho^i, i = 0, 1, 2, \dots, |z| \leq 1$ και $\rho \leq 1$

ΧΡΟΝΟΙ ΠΑΡΑΜΟΝΗΣ & ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗΣ – M/G/1

Sojourn & Waiting Times – M/G/1

T, W, S : Χρόνοι Παραμονής (**Sojourn Time**), Αναμονής (**Waiting Time**) και Εξυπηρέτησης (**Service Time**), $T = W + S$



Υπολογισμός του μετασχηματισμού Laplace $F_T(p)$ Χρόνου Παραμονής T Συστήματος M/G/1

- Ο **Χρόνος Παραμονής** πελάτη που εισέρχεται στη ουρά την χρονική στιγμή t ορίζεται σαν η συνολική παραμονή T μέχρι να εξυπηρετηθούν οι $n(t) = i$ πελάτες που βρίσκει μπροστά του (υποθέτουμε εξυπηρέτηση **FCFS/FIFO**). Οι εργοδικές πιθανότητες της $n(t)$ είναι ίσες με τις πιθανότητες $\pi(i)$ της ενσωματωμένης αλυσίδας Markov $\Rightarrow$ {Πληθυσμός στο σύστημα μετά την αναχώρηση Πελάτη} = {Αριθμός αφίξεων **Poisson** στη διάρκεια του $T = \tau$ }

$$\pi(i) = \int_{\tau=0}^{\infty} [e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^i / i!] f_T(\tau) d\tau$$

$$\Pi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi(i) z^i = \sum_{i=0}^{\infty} \left[\int_{\tau=0}^{\infty} P(i | T=\tau) f_T(\tau) d\tau \right] z^i = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\tau=0}^{\infty} [e^{-\lambda\tau} (\lambda z\tau)^i / i!] f_T(\tau) d\tau = \int_{\tau=0}^{\infty} e^{-(\lambda-\lambda z)\tau} f_T(\tau) d\tau = F_T(\lambda - \lambda z)$$

Με $p = \lambda - \lambda z$ προκύπτει ο επίσης ονομαζόμενος τύπος **Pollaczek – Khinchin (P-K)** για τον Χρόνο Παραμονής T :

Τύπος **Pollaczek – Khinchin (P-K)** για τον Μετασχηματισμό Laplace Χρόνου Παραμονής T Εργοδικής Ουράς M/G/1

$$F_T(p) = \int_{\tau=0}^{\infty} e^{-p\tau} f_T(\tau) d\tau = \frac{(1-\rho)F_S(p)p}{\lambda F_S(p) + p - \lambda}$$

Παράδειγμα M/M/1: Εκθετική εξυπηρέτηση $E(S) = 1/\mu$, $F_S(p) = \frac{\mu}{\mu+p} \Rightarrow F_T(p) = \frac{\mu(1-\rho)}{\mu(1-\rho)+p}$ και

$$f_T(\tau) = \mu(1-\rho)e^{-\mu(1-\rho)\tau}, \tau \geq 0$$

Παράδειγμα M/D/1: Σταθερή εξυπηρέτηση $E(S) = S = 1/\mu$, $F_S(p) = e^{-p/\mu} \Rightarrow F_T(p) = \frac{(1-\rho)e^{-p/\mu} \cdot p}{\lambda e^{-p/\mu} + p - \lambda}$

- $T = W + S$ όπου W, S ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές άρα $F_T(p) = F_W(p) \cdot F_S(p) \Rightarrow$

$$F_W(p) = \frac{(1-\rho)p}{\lambda F_S(p) + p - \lambda}$$

ΜΕΣΕΣ ΤΙΜΕΣ ΕΠΙΔΟΣΗΣ Μ/Γ/1

- Από τύπους **P-K**:

$E[n(t)] = \Pi(1)'$ παραγωγή της $\Pi(z)$ με διπλή εφαρμογή του κανόνα L' Hospital και αναγωγή στη τιμή $z=1$

$E(T) = F_T(0)'$ παραγωγή της $F_T(p)$ με κανόνα L' Hospital και αναγωγή στη τιμή $p=0$

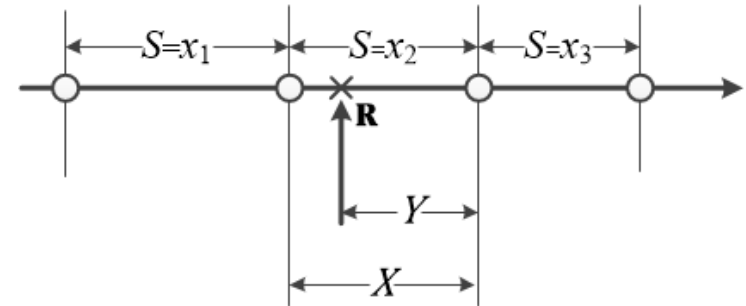
- Με άμεση εφαρμογή **Μέσων Τιμών, Θεωρίας Ανανέωσης** και του τύπου του **Little**:

➤ $E(T) = E[n(t)]/\lambda$, $E(W) = E[n_Q(t)]/\lambda$

➤ $E(W) = E(T) - E(S)$



$$E(T) = E(W) + E(S) = E(W) + 1/\mu$$



$n_Q(t)$: Αριθμός πελατών στην αναμονή, $E[n_Q(t)] = \lambda \cdot E(W)$

$E[n_Q(t)] \cdot E(S)$: Μέσος χρόνος εξυπηρέτησης πελατών που προηγούνται στην αναμονή

$\rho = \lambda \cdot E(S)$: Πιθανότητα να υπάρχει πελάτης στην εξυπηρέτηση κατά την άφιξη Poisson (ιδιότητα **PASTA**)

$E(Y) = \frac{E(S^2)}{2E(S)}$: Μέσος υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης πελάτη κατά τυχαία άφιξη (**Renewal Paradox**)

$$E(W) = E[n_Q(t)] \cdot E(S) + \rho \cdot E(Y) = E(W) \cdot \lambda \cdot E(S) + \rho \cdot E(Y) \Rightarrow E(W) = \frac{\rho E(Y)}{1-\rho} :$$

Τύπος **Pollaczek – Khinchin (P-K)** για Μέσο Εργοδικό Χρόνο

Αναμονής & Παραμονής σε Ουρά Μ/Γ/1

$$E(W) = \frac{\lambda E(S^2)}{2(1-\rho)}, \quad E(T) = E(W) + 1/\mu$$

Παράδειγμα Μ/Μ/1: $E(S) = 1/\mu$, $E(S^2) = 2/\mu^2 \Rightarrow E(W) = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$, $E(T) = E(W) + 1/\mu = \frac{1/\mu}{(1-\rho)}$

Παράδειγμα Μ/D/1: $E(S) = S = 1/\mu$, $E(S^2) = 1/\mu^2 \Rightarrow E(W) = \frac{\rho}{2\mu(1-\rho)}$, $E(T) = E(W) + 1/\mu$